



Paper Type: Original Article



Presentation of a Fuzzy Inverse Data Envelopment Analysis Model Using Triangular Fuzzy Numbers for Input Estimation and Cost Efficiency Preservation

Mohammad Taghi Yahyapour Shikh Zahedi^{1,*} , Akbar Amiri² , Eisa Abdolmaleki³ ¹ Department of Mathematics, Ramsar Branch, Islamic Azad University, Ramsar, Iran; mt.yahyapour@iau.ir.² Department of Mathematics, Talesh Branch, Islamic Azad University, Talesh, Iran; ak.amiri@iau.ac.ir.³ Department of Applied Mathematics, Tonekabon Branch, Islamic Azad University, Tonekabon, Mazandaran; eisa.abdolmalek@gmail.com.

Citation:

Yahyapour Shikh Zahedi, M. T., Amiri, A., & Abdolmaleki, E. (2025). Presentation of a fuzzy inverse data envelopment analysis model using triangular fuzzy numbers for input estimation and cost efficiency preservation. *Management: Modeling, analysis and applications*, 2(2), 120-129.

Received: 12/12/2024

Reviewed: 28/02/2025

Revised: 09/03/2025

Accepted: 01/05/2025

Abstract

Purpose: The purpose of this paper is to propose a Fuzzy Inverse Data Envelopment Analysis (FIDEA) model based on triangular fuzzy numbers to estimate input values when outputs change, ensuring that Cost Efficiency (CE) is maintained or improved. The study addresses uncertainty and imprecision commonly found in real-world data.

Methodology: Using properties of triangular fuzzy numbers and Fuzzy Linear Programming (FLP), the proposed approach converts the FIDEA model into an equivalent crisp linear model. This transformation enables the estimation of fuzzy input levels corresponding to changes in outputs. A numerical example is presented to illustrate the effectiveness of the method.

Findings: Results show that the proposed FIDEA model accurately estimates optimal fuzzy inputs while preserving or improving cost efficiency. It reflects real-world uncertainty better than traditional crisp Data Envelopment Analysis (DEA) models and eliminates the need for fuzzy ranking functions.

Originality/Value: This research introduces a new triangular FIDEA framework that maintains the fuzziness of data throughout the optimization process. The method enhances the realism and flexibility of inverse DEA applications and can be extended to network DEA models or integrated with metaheuristic algorithms for advanced analysis.

Keywords: Inverse data envelopment analysis, Cost efficiency improvement, Output enhancement, Triangular fuzzy numbers.



Corresponding Author: mt.yahyapour@iau.ir

<https://doi.org/10.22105/mmaa.v2i2.94>

Licensee. **Management: Modeling, Analysis and Application**. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>).



ارایه مدل تحلیل پوششی داده‌های معکوس فازی با استفاده از اعداد فازی مثلثی برای تخمین ورودی‌ها و حفظ کارایی هزینه

محمدتقی یحیی پور شیخ زاهدی^۱، اکبر امیری^۲، عیسی عبدالملکی^۳

^۱گروه ریاضی، واحد رامسر، دانشگاه آزاد اسلامی، رامسر، ایران.

^۲گروه ریاضی، واحد تالش، دانشگاه آزاد اسلامی، تالش، ایران.

^۳گروه ریاضی کاربردی، واحد تنکابن، دانشگاه آزاد اسلامی، تنکابن، ایران.

چکیده

هدف: هدف این مقاله ارایه یک مدل تحلیل پوششی داده‌های معکوس فازی^۱ مبتنی بر اعداد فازی مثلثی برای تخمین مقادیر ورودی در شرایطی است که خروجی‌ها تغییر می‌کنند، به گونه‌ای که کارایی هزینه^۲ حفظ یا بهبود یابد. این پژوهش به مساله عدم قطعیت و ابهام موجود در داده‌های واقعی می‌پردازد.

روش‌شناسی پژوهش: با استفاده از خواص اعداد فازی مثلثی و برنامه‌ریزی خطی فازی^۳، مدل پیشنهادی، مدل *FIDEA* را به یک مدل خطی قطعی معادل تبدیل می‌کند. این تبدیل امکان تخمین سطوح ورودی فازی متناسب با تغییرات خروجی‌ها را فراهم می‌سازد. همچنین یک مثال عددی برای نشان دادن کارایی مدل ارایه شده است.

یافته‌ها: نتایج نشان می‌دهد که مدل پیشنهادی قادر است ورودی‌های فازی بهینه را با حفظ یا بهبود *CE* تخمین بزند. این مدل، عدم قطعیت دنیای واقعی را بهتر از مدل‌های سنتی و قطعی تحلیل پوششی داده‌ها^۴ منعکس می‌کند و نیاز به توابع رتبه‌بندی فازی را از بین می‌برد.

اصالت/ارزش افزوده علمی: این پژوهش چارچوبی جدید برای مدل *FIDEA* مثلثی ارایه می‌دهد که فازی بودن داده‌ها را در کل فرایند بهینه‌سازی حفظ می‌کند. مدل پیشنهادی باعث افزایش واقع‌گرایی و انعطاف‌پذیری در کاربردهای *DEA* شده و می‌تواند برای مدل‌های شبکه‌ای یا همراه با الگوریتم‌های فراابتکاری گسترش یابد.

کلیدواژه‌ها: تحلیل پوششی داده‌های معکوس، بهبود کارایی هزینه، افزایش خروجی‌ها، اعداد فازی مثلثی.

۱- مقدمه

باتوجه به ماهیت مسایل دنیای واقعی، داده‌های جمع‌آوری شده معمولاً شامل نوعی عدم اطمینان هستند. در حقیقت، بسیاری از داده‌ها به دلیل ماهیت آن‌ها نمی‌توانند کمی شوند. اطلاعات ناقص یا ناآگاهی جزئی نیز دلیل دیگری برای کاربرد تئوری فازی است. اگرچه در بسیاری از موارد می‌توان اطلاعات دقیق به دست آورد، برخی از داده‌های تقریبی به اندازه کافی خوب ارزیابی می‌شود تا از هزینه‌های بالای جمع‌آوری دقیق اطلاعات جلوگیری شود؛ بنابراین، بسیاری از محققان ترجیح می‌دهند داده‌های فازی را در مدل‌های تصمیم‌گیری خود قرار دهند تا نتایج واقعی‌تری داشته

¹ Fuzzy Inverse Data Envelopment Analysis (FIDEA)

² Cost Efficiency (CE)

³ Fuzzy Linear Programming (FLP)

⁴ Data Envelopment Analysis (DEA)

باشند. علاوه بر این، طبق گفته برخی محققان، داده‌های ناشی از پدیده‌های ذهنی انسان را می‌توان با اعداد فازی در مقایسه با اعداد واضح یا حتی تصادفی، واقع‌بینانه‌تر بیان کرد.

ابراهیم‌نژاد و همکاران [1] روش اولیه ثانویه را برای مسایل برنامه‌ریزی خطی^۱ با متغیرهای فازی ارایه دادند. امین و همکاران [2] روشی را برای حل یک سیستم برنامه‌ریزی فازی تعاملی پیشنهاد کرد. ملکی و همکاران [3] مفهومی برای حل LP با متغیرهای فازی ارایه دادند. روملفانگر [4] یک مفهوم کلی برای حل مسایل برنامه‌ریزی چندمعیاره خطی با مقادیر قطعی، فازی یا تصادفی ارایه داد. ملکی [5] توابع رتبه‌بندی و کاربردهای آن‌ها را برای حل FLP پیشنهاد داد. رامیک [6] برخی از مفاهیم و نتایج جدید را در ثانویه FLP معرفی کرده است. گانسان و ویرامانی [7] روشی را برای حل مسایل FLP با اعداد فازی دوزنقه‌ای پیشنهاد کردند. ناصری [8] روش جدیدی را برای حل FLP با حل LP پیشنهاد داد. عزتی و همکاران [9] یک الگوریتم جدید برای حل مسایل برنامه‌ریزی کاملاً فازی با استفاده از مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه^۲ ارایه کردند. عدالت‌پناه [10] یک مدل مستقیم برای LP نوتروسفیک مثلی ارایه نمود. داس و همکاران [11] یک مدل ریاضی برای حل مساله LP کاملاً فازی با اعداد فازی دوزنقه‌ای پیشنهاد نمودند.

DEA یک روش غیر پارامتری بر اساس برنامه‌ریزی ریاضی برای اندازه‌گیری کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده^۳ است که توسط چارنز [12] ارایه گردید، DEA برای محاسبه کارایی هر واحد در مقایسه با سایر واحدها به کار می‌رود. هدف اصلی آن، مقایسه و سنجش کارایی تعدادی از $DMUs$ مشابه است که چندین ورودی و چندین خروجی دارند. منظور از مقایسه و سنجش کارایی نیز این است که یک DMU در مقایسه با سایر $DMUs$ ، چقدر خوب از منابع خود در راستای تولید استفاده کرده است. DEA کاربردهای زیادی دارد که شامل زمینه‌های آموزشی، اقتصاد، مدیریت، بهداشت و حمل و نقل و ... می‌باشند [9]. این تکنیک توسط بنکر و همکاران [13] توسعه داده شد و DEA معکوس یکی از موضوعات قابل توجه در بخش‌های عملی و نظری می‌باشد که در آن کارایی نسبی DMU تحت ارزیابی داده شده است و هدف تعیین سطوح ورودی و خروجی یک DMU است تا مقدار کارایی نسبی آن ثابت بماند یا بهبود یابد. DEA معکوس اولین بار توسط ویی و همکاران [14] مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت. ویی و همکاران [14] مدلی را برای پاسخگویی به این پرسش پیشنهاد کردند. «اگر در میان گروهی از $DMUs$ یک یا چند ورودی در یک واحد خاص را افزایش دهیم و فرض کنیم که DMU تحت ارزیابی کارایی خود را در مقایسه با دیگر واحدها حفظ کند، تا چه میزان خروجی‌های DMU تحت ارزیابی افزایش می‌یابند؟»

یان و همکاران [15] یک مساله LP برای واحدهای کارای ضعیف تحت ارزیابی، ارایه کردند و هم‌چنین یک مدل $MOLP$ برای واحدهای ناکارای تحت ارزیابی ارایه دادند. علاوه بر این، در ادامه هادی وینچه و همکاران [16] در مطالعات خود، مدل ارایه‌شده به‌وسیله ویی و همکاران [14] را برای جواب سوال زیر توسعه دادند. «اگر در میان گروهی از $DMUs$ چندین خروجی را در یک واحد خاص افزایش دهیم و فرض کنیم که DMU کارایی نسبی خود را در مقایسه با دیگر واحدها حفظ کند، تا چه میزان ورودی‌های DMU افزایش می‌یابند؟» برای جواب پرسش فوق سیدی و همکاران [17] نیز مدلی پیشنهاد نمودند. DEA تکنیکی غیر پارامتری برای ارزیابی کارایی نسبی $DMUs$ بر اساس ماهیت آن است. ماکزیم نمودن درآمد یا سود، مینیم کردن هزینه، هدف‌های رفتاری همراه با قیمت ورودی‌ها و خروجی‌ها می‌باشند.

اولین بار فارل [18] تعریف CE را معرفی کرد که نقش معناداری در توسعه مفهوم DEA بازی کرده است. او CE را با استفاده از تکنیک LP به‌دست آورد. این مدل LP علاوه بر داده‌های ورودی و خروجی به قیمت‌های ورودی $DMUs$ نیاز دارد. CE به‌عنوان یک مدل DEA ، ابزار اندازه‌گیری توانایی یک DMU برای رسیدن به خروجی فعلی با حداقل هزینه است. روملفانگر [4] از نسبت ورودی توابع شبه‌فاصله مستقیم و غیرمستقیم برای اندازه‌گیری کارایی تخصیص خروجی استفاده کردند. عدالت‌پناه [10] کارایی سود، هزینه و درآمد زنجیره‌های تامین چندمرحله‌ای را در سه مرحله ارزیابی نمود. تخصیص عادلانه هزینه درآمد ثابت مشترک توسط DEA توسط خدابخشی و همکارش بررسی شد. مدل‌های CE درآمد در DEA_R توسط گانسان و ویرامانی [7] ارایه گردید. روش متمرکز شده برای تخصیص دوباره منابع بر اساس کارایی درآمد در بین مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیری در یک محیط متمرکز شده توسط ویی و همکاران [14] ارایه گردید. امین و همکاران [2] یک مدل DEA معکوس جدید را بر اساس یک مدل CE برای تخمین سود بالقوه از ادغام معرفی می‌کند. عدالت‌پناه و همکاران [19] تغییر نگرش در حل LP : یک الگوریتم بدون استفاده از

¹ Linear Programming (LP)

² Multi-Objective Linear Programming (MOLP)

³ Decision-Making Units (DMUs)

متغیرهای مصنوعی مطرح نمودند. یحیی پور شیخ زاهدی و همکاران [20] در سال های اخیر به موضوعات، ارایه مدلی بر اساس خواص اعداد فازی برای حل FLP ، یک مدل جدید مبتنی بر حساب فازی برای حل مسایل LP تماما فازی، جواب بهین چندگانه در مساله LP معکوس پرداختند [21]- [23]. با استفاده از روش های پیشنهادی، به راحتی می توان جواب بهینه فازی برای مساله FLP متناسب با رخدادهای دنیای واقعی به دست آورد.

در این مقاله ابتدا در بخش ۲، تعریف اصلی و در بخش ۳، CE ، بهبود CE با افزایش خروجی ها و DEA معکوس با داده های فازی معرفی خواهد شد. سپس در بخش ۴، DEA معکوس به منظور تخمین ورودی ها با اعداد فازی مثلثی با ارایه مثال عددی مورد بررسی قرار خواهد گرفت و در بخش ۵، مقاله با نتیجه گیری از موارد ذکر شده به اتمام خواهد رسید.

۲- تعاریف اساسی

در این بخش برخی از تعاریف اساسی آورده شده است.

تعریف ۱- عدد فازی $\tilde{A} = (a, b, c)$ را عدد فازی مثلثی می نامند و به صورت زیر تعریف می شود:

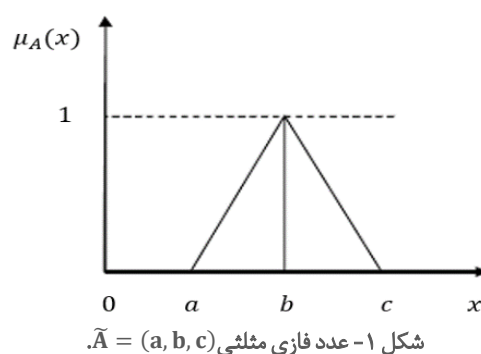


Figure 1- Trigonometric fuzzy number $\tilde{A} = (a, b, c)$.

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (1)$$

تعریف ۲- به عدد فازی $\tilde{A} = (a, b, c)$ عدد فازی نامنفی گفته می شود اگر و فقط اگر $a \geq 0$ است.

تعریف ۳- فرض کنید $A = (a_1, b_1, c_1)$ و $B = (a_2, b_2, c_2)$ دو عدد فازی مثلثی هستند، آنگاه:

$$\begin{aligned} 1. \quad A \leq B &\leftrightarrow a_1 \leq a_2, b_1 - a_1 \leq b_2 - a_2, c_1 - b_1 \leq c_2 - b_2, \\ 2. \quad A \geq B &\leftrightarrow a_1 \geq a_2, b_1 - a_1 \geq b_2 - a_2, c_1 - b_1 \geq c_2 - b_2, \\ 3. \quad A = B &\leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2. \end{aligned} \quad (2)$$

تعریف ۴- عملیات حسابی بین دو عدد فازی مثلثی به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} 1. \quad A + B &= (a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2), \\ 2. \quad -A &= -(a_1, b_1, c_1) = (-a_1, -b_1, -c_1), \\ 3. \quad A - B &= (a_1, b_1, c_1) - (a_2, b_2, c_2) = (a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2), \\ 4. \quad A \cdot B &= \begin{cases} (a_1 a_2, b_1 b_2, c_1 c_2), & a_1 \geq 0, \\ (a_1 c_2, b_1 b_2, c_1 c_2), & a_1 < 0, c_1 \geq 0, \\ (a_1 c_2, b_1 b_2, c_1 a_2), & c_1 < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

$$5. \frac{A}{B} = (a_1, b_1, c_1) \div (a_2, b_2, c_2) = \left(\frac{a_1}{c_2}, \frac{b_1}{b_2}, \frac{c_1}{a_2} \right), \quad a_1 \geq 0, a_2 > 0.$$

۳- مساله FLP

در شرایط زندگی واقعی مربوط به مسایل تجاری و صنعتی ممکن است روابط خطی بین ضرایب و متغیرهای وجود نداشته باشد. در چنین شرایطی می‌توان پارامترهای مسایل LP به عنوان اعداد فازی نشان داده شوند. به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\begin{aligned} & \max(\text{or min}) \quad C^T \cdot X, \\ & \text{s. t.} \\ & A \cdot X \leq, =, \geq b, \\ & X \text{ is a non - negative fuzzy number,} \end{aligned}$$

که در آن $A = (a_{ij})_{m \times n}$ و $C^T = (c_j)_{1 \times n}$ و $b = (b_i)_{m \times 1}$ و $X = (x_j)_{n \times 1}$ و $a_{ij}, c_j, b_i, x_j \in F(R)$ یک مساله FLP چندهدفه با متغیرهای فازی و محدودیت‌های فازی است.

۳-۱- تبدیل قیود نامساوی به قیود مساوی

در روش پیشنهادی تمامی محدودیت مدل باید از نوع تساوی باشند برای این منظور ابتدا نوع همه محدودیت‌ها $\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_i$ یا $\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \neq b_i$ را برای هر $i = 1, 2, \dots, m$ بررسی کنید.

حالت اول: اگر $\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i$ برای برخی از مقادیر i باشد، با اضافه نمودن متغیرهای نامنفی S_i به سمت چپ قیود نامساوی را به قیود مساوی تبدیل کنید. یعنی $\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j + S_i = b_i$ برای برخی از مقادیر i که در آن S_i یک عدد فازی نامنفی است.

حالت دوم: اگر $\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \geq b_i$ برای برخی از مقادیر i باشد، با اضافه نمودن متغیرهای نامنفی S_i به سمت راست قیود نامساوی را به قیود مساوی تبدیل کنید. یعنی $\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_i + S_i$ برای برخی از مقادیر i که در آن S_i یک عدد فازی نامنفی است.

۴- جواب بهینه فازی برای مسایل FLP

در روش پیشنهادی از خاصیت عدد فازی $A = (a, b, c)$ یعنی $a \leq b \leq c$ در مساله استفاده می‌شود و مساله FLP به مساله LP تبدیل شده و بعد از به دست آوردن جواب بهینه آن به جواب بهینه فازی مساله FLP خواهد رسید. مساله FLP زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} & \max(\text{or min}) \quad C^T \cdot X, \\ & \text{s. t.} \\ & A \cdot X \leq, =, \geq b, \\ & X \text{ is a non - negative fuzzy number,} \end{aligned}$$

که در آن $A = (a_{ij})_{m \times n}$ و $C^T = (c_j)_{1 \times n}$ و $b = (b_i)_{m \times 1}$ و $X = (x_j)_{n \times 1}$ است به مساله LP زیر تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 \max(or \min) \quad & Z = \sum_{j=1}^n w_j, \\
 s.t. \quad & \sum_{j=1}^n m_{ij} = b_i, \quad for \text{ all } i = 1, 2, \dots, m, \\
 & \sum_{j=1}^n n_{ij} = g_i, \quad for \text{ all } i = 1, 2, \dots, m, \\
 & \sum_{j=1}^n o_{ij} = h_i, \quad for \text{ all } i = 1, 2, \dots, m, \\
 & \sum_{j=1}^n w_j \leq \sum_{j=1}^n t_j, \\
 & \sum_{j=1}^n t_j \leq \sum_{j=1}^n u_j, \\
 & y_j - x_j \geq 0, \quad z_j - y_j \geq 0, \quad for \text{ all } j = 1, 2, \dots, n, \\
 & x_j \geq 0, z_j \geq 0, y_j \geq 0, \quad for \text{ all } j = 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{۴}$$

فرض کنید $x_j^*, y_j^*, z_j^*, for \text{ all } j = 1, 2, \dots, n$ و Z_1^* جواب بهینه مدل LP مرحله ۶ باشد که در آن فرض کنید $(a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}). (x_j, y_j, z_j) =$
 $Z^* = (Z_1^* = \sum_{j=1}^n w_j, \text{ و } X^* = (x_j^*, y_j^*, z_j^*), FLP$ مساله است. آن گاه جواب بهینه مساله $(p_j, q_j, r_j). (x_j, y_j, z_j) = (w_j, t_j, u_j)$ و (m_{ij}, n_{ij}, o_{ij})
 $Z_2^* = \sum_{j=1}^n t_j, Z_3^* = \sum_{j=1}^n u_j$ را پیدا کنید.

FIDEA - ۴

اکنون مساله DEA معکوس با داده های فازی را بر CE واحد تحت ارزیابی به صورت زیر مطرح می کنیم. اگر مجموعه ای از $DMUs, j = 1, 2, \dots, n$ را با ورودی $\tilde{x}_{ij}$ و خروجی فازی $\tilde{y}_{ij}$ که به مجموعه اعداد فازی مثبت تعلق داشته باشند در نظر می گیریم، فرض کنید $\tilde{X}_{m \times n}$ و $\tilde{Y}_{s \times n}$ به ترتیب ماتریس های ورودی، خروجی از اعداد فازی مثلی نامنفی و $\tilde{C}_{m \times n}$ ماتریس هزینه ورودی ها با درایه های فازی مثلی نامنفی می باشند. هم چنین $\tilde{\lambda}_j$ نیز اعداد فازی مثلی نامنفی اند مدل CE جهت محاسبه ی CE، DMU_o به شکل زیر است:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \tilde{z} = \sum_{i=1}^m \tilde{c}_{io} \tilde{x}_{io}, \\
 s.t. \quad & \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j \tilde{x}_{ij} \leq \tilde{x}_{io}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
 & \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j \tilde{y}_{rj} \geq \tilde{y}_{ro}, \quad r = 1, 2, \dots, s, \\
 & \tilde{x}_i \geq 0, \quad \tilde{\lambda}_j \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{۵}$$

اگر $\tilde{x}^*$ و $\tilde{\lambda}^*$ و $\tilde{z}^*$ جواب بهینه مساله (۵) باشد CE کلی واحد تحت ارزیابی j th با تقسیم مینیمم هزینه کلی $\tilde{z}^* = \sum_{i=1}^m \tilde{c}_{io} \tilde{x}_i^*$ بر هزینه مشاهده شده $\sum_{i=1}^m \tilde{c}_{io} \tilde{x}_{io}$ تعریف می شود.

$$E_{co} = \frac{\sum_{i=1}^m \tilde{c}_{io} \tilde{x}_i^*}{\sum_{i=1}^m \tilde{c}_{io} \tilde{x}_{io}}, \tag{۶}$$

که در آن $0 < E_{co} \leq 1$ برای $(o = 1, 2, \dots, n)$.

اکنون مساله DEA معکوس با داده‌های فازی را برای بهبود CE با افزایش خروجی‌ها به صورت زیر مطرح می‌کنیم و با آشفته نمودن بردار خروجی‌ها میزان آشفته‌گی بردار ورودی‌ها را با حفظ مقدار CE محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \bar{z} = \sum_{i=1}^m \tilde{c}_{io} \tilde{x}_i, \\
 \text{s. t.} \quad & \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n \tilde{\lambda}_j \tilde{x}_{ij} \leq \tilde{x}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n \tilde{\lambda}_j \tilde{y}_{rj} \geq y_{ro} + \Delta y_{ro}, \quad r = 1, 2, \dots, s, \\
 & \sum_{i=1}^m \tilde{c}_{io} \tilde{x}_i \geq \bar{z}^*, \quad \tilde{x}_i \geq 0, \quad \tilde{\lambda}_j \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
 & j = 1, 2, \dots, n, \quad j \neq o,
 \end{aligned} \tag{۷}$$

که در آن $\bar{z}^*$ جواب بهینه‌ی مدل (۶) است. $\tilde{c}_{io}$ قیمت یا هزینه ورودی i th DMU تحت ارزیابی oth است.

۵- روش پیشنهادی برای یافتن مقادیر ورودی‌های فازی

باتوجه به روش حل FLP ارائه شده [12] می‌توان برای همه محدودیت‌ها را به صورت محدودیت‌های تساوی می‌نویسیم سپس با جایگزینی تعریف کرد. این به ما کمک می‌کند تا مدل $FIDEA$ ارائه شده در رابطه‌های (۵) و (۷) را به یک مساله با داده‌های قطعی تبدیل کنیم. برای انجام این کار، ما رتبه هر عدد فازی مثلثی را به جای عدد فازی مثلثی متناظر در $FIDEA$ مورد بررسی جایگزین می‌کنیم. سپس مدل CE جهت محاسبه CE ، DMU_o به شکل زیر است:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \bar{z} = (z_1, z_2, z_3) = \sum_{i=1}^m (c_{1io}, c_{2io}, c_{3io})(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) \\
 \text{s. t.} \quad & \\
 & \sum_{j=1}^n (\lambda_{1j}, \lambda_{2j}, \lambda_{3j})(x_{1ij}, x_{2ij}, x_{3ij}) \leq (x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}), \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
 & \sum_{j=1}^n (\lambda_{1j}, \lambda_{2j}, \lambda_{3j})(y_{1rj}, y_{2rj}, y_{3rj}) \geq (y_{1ro}, y_{2ro}, y_{3ro}), \quad r = 1, 2, \dots, s, \\
 & x_{1i} \geq 0, \quad \lambda_{1j} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{۸}$$

بعد از ساده‌کردن، محدودیت‌ها را به صورت تساوی می‌نویسیم:

$$\min \tilde{z} = (z_1, z_2, z_3) = \left(\sum_{i=1}^m c_{1io} x_{1i}, \sum_{i=1}^m c_{2io} x_{2i}, \sum_{i=1}^m c_{3io} x_{3i} \right),$$

s. t.

$$\left(\sum_{j=1}^n \lambda_{1j} x_{1ij}, \sum_{j=1}^n \lambda_{2j} x_{2ij}, \sum_{j=1}^n \lambda_{3j} x_{3ij} \right) + (S_{1xi}, S_{2xi}, S_{3xi}) = (x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (9)$$

$$\left(\sum_{j=1}^n \lambda_{1j} y_{1rj}, \sum_{j=1}^n \lambda_{2j} y_{2rj}, \sum_{j=1}^n \lambda_{3j} y_{3rj} \right) = (y_{1ro}, y_{2ro}, y_{3ro}) + (S_{1yr}, S_{2yr}, S_{3yr}), \quad r = 1, 2, \dots, s,$$

$$x_{1i} \geq 0, \quad \lambda_{1j} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

بعد از ساده کردن و بازنویسی می کنیم:

$$\min \tilde{z} = \sum_{i=1}^m c_{1io} x_{1i},$$

s. t.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{1j} x_{1ij} + S_{1xi} = x_{1i},$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{2j} x_{2ij} + S_{2xi} = x_{2i},$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{3j} x_{3ij} + S_{3xi} = x_{3i}, \quad \text{for all } i,$$

(۱۰)

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{1j} y_{1rj} = y_{1ro} + S_{1yr},$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{2j} y_{2rj} = y_{2ro} + S_{2yr},$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{3j} y_{3rj} = y_{3ro} + S_{3yr}, \quad \text{for all } r,$$

$$\sum_{i=1}^m c_{1io} x_{1i} \leq \sum_{i=1}^m c_{2io} x_{2i},$$

$$\sum_{i=1}^m c_{2io} x_{2i} \leq \sum_{i=1}^m c_{3io} x_{3i},$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{1i} &\geq 0, & x_{3i} - x_{2i} &\geq 0, & x_{2i} - x_{1i} &\geq 0, & i &= 1, 2, \dots, m, \\ \lambda_{1j} &\geq 0, & \lambda_{3j} - \lambda_{2j} &\geq 0, & \lambda_{2j} - \lambda_{1j} &\geq 0, & j &= 1, 2, \dots, n, \\ S_{1yr} &\geq 0, & S_{3yr} - S_{2yr} &\geq 0, & S_{2yr} - S_{1yr} &\geq 0, & r &= 1, 2, \dots, s, \\ S_{1xi} &\geq 0, & S_{3xi} - S_{2xi} &\geq 0, & S_{2xi} - S_{1xi} &\geq 0, & i &= 1, 2, \dots, m, \end{aligned}$$

که در آن $\tilde{z} = (z_1, z_2, z_3) = (\sum_{i=1}^m c_{1io} x_{1i}, \sum_{i=1}^m c_{2io} x_{2i}, \sum_{i=1}^m c_{3io} x_{3i})$ و $\tilde{x}_i = (x_{1i}, x_{2i}, x_{3i})$ و $\tilde{\lambda}_j = (\lambda_{1j}, \lambda_{2j}, \lambda_{3j})$ باشد CE کلی واحد تحت ارزیابی j th با تقسیم مینیمم هزینه کلی $Z^* = \sum_{i=1}^m \tilde{c}_{io} \tilde{x}_i^*$ بر هزینه مشاهده شده $\sum_{i=1}^m \tilde{c}_{io} \tilde{x}_{io}$ تعریف می‌شود. اکنون مساله DEA معکوس با داده‌های فازی مثلی را برای بهبود CE با افزایش خروجی‌ها به صورت زیر مطرح می‌کنیم و با آشفته نمودن بردار خروجی‌ها میزان آشفته‌گی بردار ورودی‌ها را با حفظ مقدار CE محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \min \tilde{z} &= \sum_{i=1}^m c_{1io} x_{1i}, \\ \text{s. t.} \\ \sum_{j=1}^n \lambda_{1j} x_{1ij} + S_{1xi} &= x_{1i}, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_{2j} x_{2ij} + S_{2xi} &= x_{2i}, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_{3j} x_{3ij} + S_{3xi} &= x_{3i}, \quad \text{for all } i, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_{1j} y_{1rj} &= y_{1ro} + S_{1yr}, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_{2j} y_{2rj} &= y_{2ro} + S_{2yr}, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_{3j} y_{3rj} &= y_{3ro} + S_{3yr}, \quad \text{for all } r, \\ \sum_{i=1}^m c_{1io} x_{1i} &\leq \sum_{i=1}^m c_{2io} x_{2i}, \\ \sum_{i=1}^m c_{2io} x_{2i} &\leq \sum_{i=1}^m c_{3io} x_{3i}, \\ \sum_{i=1}^m c_{1io} x_{1i} &\geq z_1^*, \end{aligned} \tag{۱۱}$$

$$\sum_{i=1}^m c_{2io} x_{2i} \geq z_2^*,$$

$$\sum_{i=1}^m c_{3io} x_{3i} \geq z_3^*,$$

$$\tilde{x}_{1i} \geq 0, \quad x_{3i} - x_{2i} \geq 0, \quad x_{2i} - x_{1i} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\lambda_{1j} \geq 0, \quad \lambda_{3j} - \lambda_{2j} \geq 0, \quad \lambda_{2j} - \lambda_{1j} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$S_{1yr} \geq 0, \quad S_{3yr} - S_{2yr} \geq 0, \quad S_{2yr} - S_{1yr} \geq 0, \quad r = 1, 2, \dots, s,$$

$$S_{1xi} \geq 0, \quad S_{3xi} - S_{2xi} \geq 0, \quad S_{2xi} - S_{1xi} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

که در آن z_1^* و z_2^* و z_3^* جواب بهینه‌ی مدل (۱۰) است.

۶- نتیجه‌گیری

هدف از این تحقیق ارائه دیدگاهی در زمینه به‌کارگیری روش *DEA* معکوس با اعداد فازی مثلثی با استفاده از خواص اعداد فازی مثلثی برای حل مسایل *FLP* با ضرایب اعداد فازی مثلثی بوده است. در این مقاله با تغییر مقدار برخی یا همه خروجی‌ها به‌طوری‌که منجر به حفظ یا بهبود *CE* شود یک رویکرد و روش جدید در محاسبه مقدار ورودی‌های *DMU* تحت ارزیابی بدون رتبه‌بندی اعداد فازی مثلثی ارائه شد. با استفاده از *DEA* معکوس با اعداد فازی مثلثی یک مدل جدید که با حل یک مدل *LP*، جواب مسایل *FLP* با ضرایب اعداد فازی مثلثی برای تخمین ورودی‌ها با حفظ یا بهبود *CE* ارائه گردید و توانستیم مقدار بهینه ورودی‌های فازی را با حل یک مدل *LP* به دست آوریم. در پژوهش‌های آتی از ترکیب روش‌های فرا ابتکاری مانند الگوریتم ژنتیک و *PSO* و ... به همراه مدل مذکور استفاده شود. هم‌چنین پیشنهاد می‌شود که روش مذکور را برای حالت *DEA* شبکه‌ای تعمیم داد.

منابع

- [1] Ebrahimnejad, A., Nasseri, S. H., Lotfi, F. H., & Soltanifar, M. (2010). A primal-dual method for linear programming problems with fuzzy variables. *European journal of industrial engineering*, 4(2), 189–209. <https://doi.org/10.1504/EJIE.2010.031077>
- [2] Amin, G. R., Al-Muharrami, S., & Toloo, M. (2019). A combined goal programming and inverse DEA method for target setting in mergers. *Expert systems with applications*, 115, 412–417. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2018.08.018>
- [3] Maleki, H. R., Tata, M., & Mashinchi, M. (2000). Linear programming with fuzzy variables. *Fuzzy sets and systems*, 109(1), 21–33. [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(98\)00066-9](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(98)00066-9)
- [4] Rommelfanger, H. (2007). A general concept for solving linear multicriteria programming problems with crisp, fuzzy or stochastic values. *Fuzzy sets and systems*, 158(17), 1892–1904. <https://doi.org/10.1016/j.fss.2007.04.005>
- [5] Maleki, H. R. (2002). Ranking functions and their applications to fuzzy linear programming. *Far east journal of mathematical sciences*, 4(3), 283–302. <https://www.researchgate.net/publication/268043452>
- [6] Ramfk, J. (2005). Duality in fuzzy linear programming: Some new concepts and results. *Fuzzy optimization and decision making*, 4(1), 25–39. <https://doi.org/10.1007/s10700-004-5568-z>
- [7] Ganesan, K., & Veeramani, P. (2006). Fuzzy linear programs with trapezoidal fuzzy numbers. *Annals of operations research*, 143(1), 305–315. <https://doi.org/10.1007/s10479-006-7390-1>
- [8] Nasseri, S. H. (2008). A new method for solving fuzzy linear programming by solving linear programming. *Applied mathematical sciences*, 2(50), 2473–2480. <https://m-hikari.com/ams/ams-password-2008/ams-password49-52-2008/nasseriAMS49-52-2008-1.pdf>
- [9] Ezzati, R., Khorram, E., & Enayati, R. (2015). A new algorithm to solve fully fuzzy linear programming problems using the MOLP problem. *Applied mathematical modelling*, 39(12), 3183–3193. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.03.014>
- [10] Edalatpanah, S. A. (2020). A direct model for triangular neutrosophic linear programming. *International journal of neutrosophic science*, 1(1), 19–28. <https://doi.org/10.54216/IJNS.010104>
- [11] Das, S. K., Mandal, T., & Edalatpanah, S. A. (2017). A mathematical model for solving fully fuzzy linear programming problem with trapezoidal fuzzy numbers. *Applied intelligence*, 46(3), 509–519. <https://doi.org/10.1007/s10489-016-0779-x>

- [12] Chanas, S. (1983). The use of parametric programming in fuzzy linear programming. *Fuzzy sets and systems*, 11(1), 243–251. <https://dl.acm.org/doi/abs/10.5555/2846983.2847095>
- [13] Banker, R. D., Charnes, A., & Cooper, W. W. (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management science*, 30(9), 1078–1092. [https://doi.org/10.1016/0377-2217\(78\)90138-8](https://doi.org/10.1016/0377-2217(78)90138-8)
- [14] Wei, Q., Zhang, J., & Zhang, X. (2000). An inverse DEA model for inputs/outputs estimate. *European journal of operational research*, 121(1), 151–163. [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(99\)00007-7](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(99)00007-7)
- [15] Yan, H., Wei, Q., & Hao, G. (2002). DEA models for resource reallocation and production input/output estimation. *European journal of operational research*, 136(1), 19–31. [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(01\)00046-7](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(01)00046-7)
- [16] Hadi-Vencheh, A., Foroughi, A. A., & Soleimani-damaneh, M. (2008). A DEA model for resource allocation. *Economic modelling*, 25(5), 983–993. <https://doi.org/10.1016/j.econmod.2008.01.003>
- [17] Siddi, S. (2020). *Fuzzy optimal solution of fuzzy linear programming problems*. <https://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3686495>
- [18] Farrell, M. J. (1957). The measurement of productive efficiency. *Journal of the royal statistical society series a: statistics in society*, 120(3), 253–281. <https://doi.org/10.2307/2343100>
- [19] Edalatpanah, S. A., & Yahya Poursheikh Zahedi, M. T. (1402). Changing attitudes in solving linear programming: An algorithm without using artificial variables. *the 16th international conference of the iranian operations research association. (In Persian)*. Thran, Iran, Civilica. <https://civilica.com/doc/1920693/>
- [20] Yahyapour Shikh Zahedi, M. T., Teymouri, A., Kordrostami, S., & Nora, A. (2017). Multiple optimal solution in inverse linear programming problem. *The 10th international conference of the iranian operations research association. (In Persian)*. Thran, Iran, Civilica. <https://civilica.com/doc/767199/>
- [21] Yahyapour Shikh Zahedi, M. T., Teimoori, A., Kordrostami, S., & Edalatpanah, S. A. (2024). Inverse data envelopment analysis model to improve efficiency by increasing outputs. *Decision making: Applications in management and engineering*, 7(2), 1–14. <https://doi.org/10.31181/dmame722024788>
- [22] Yahyapour Shikh Zahedi, M. T. (2022). Presenting a model based on the properties of fuzzy numbers for solving fuzzy linear programming. *Bi-quarterly journal of distributed computing and systems*, 5(2), 16–22. (In Persian). https://www.jdcs.ir/article_190879_59f346c309c9fd60595ddebfd8d2b3e18.pdf
- [23] Yahyapour, T. M., Teymouri, A., Kordrostami, S., & Nora, A. (2017). Multiple optimal solution in inverse linear programming problem. *The 10th international conference of the Iranian operations research association. (In Persian)*. Thran, Iran, Civilica. <https://civilica.com/doc/767199>