



Paper Type: Original Article



Investigating the Transportation Problem with Neutrosophic Triangular Fuzzy Costs from an Intuitive Perspective

Gholam Hassan Shirdel¹ , Madineh Farnam^{2,*} , Majid Darehmira³ 

¹ Department of Mathematics, Faculty of Basic Sciences, University of Qom, Qom, Iran; g.h.shirdel@qom.ac.ir.

² Department of Electrical Engineering, Shahid Chamran University of Ahvaz - Hoveizeh Martyrs Industrial Campus, Dashtegan, Khuzestan, Iran; farnam_madineh@yahoo.com.

³ Department of Mathematics and Statistics, Khatam Al-Anbiya University of Technology, Behbahan, Khuzestan, Iran; darehmira@bkatu.ac.ir.

Citation:



Shirdel, Gh. H., Farnam, M., & Darehmira, M. (2025). Investigating the transportation problem with neutrosophic triangular fuzzy costs from an intuitive perspective. *Management: Modeling, analysis and application*, 2(1), 32-40.

Received: 15/07/2024

Reviewed: 20/09/2024

Revised: 02/12/2024

Accepted: 25/02/2025

Abstract

Purpose: Since neutrosophic sets have inspired enormous research efforts in various application fields to model problems from different aspects, the primary motivation and aim of this research is to combine the applied transportation problem with neutrosophic triangular fuzzy costs and how to deal with this type of uncertainty in the solution process.

Methodology: First, a new ranking method is proposed to calculate the value of neutrosophic triangular fuzzy data. The proposed method has the necessary capabilities to solve many problems. In the following, considering the focus of this study on the transportation problem, a hybrid algorithm based on the proposed new ranking method with neutrosophic triangular fuzzy costs is explained. Finally, the efficiency and effectiveness of the proposed algorithm are tested in MATLAB software for an illustrative example.

Findings: The findings show that while maintaining the neutrosophic structure of the data, the approach strikes a balance between computational accuracy and reducing resource waste and provides a suitable solution for decision-making under conditions of instability and uncertainty.

Originality/Value: By expanding the theoretical and practical boundaries in the field of neutrosophic, this study paves the way for solving more complex problems in decision-making and optimization under multilayer uncertainty.

Keywords: Transportation problem, Neutrosophic set, Neutrosophic triangular fuzzy number, Ranking method.



Corresponding Author: farnam_madineh@yahoo.com  <https://doi.org/10.22105/mmaa.v1i1.60>



Licensee. **Management: Modeling, Analysis and Applications**. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>).



بررسی مساله حمل و نقل با هزینه‌های فازی مثلثی نوتروسوفیک تحت نگرشی شهودی

غلام حسن شیردل^۱، مدینه فرنام^۲، مجید دره میرکی^۳

^۱گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم، قم، ایران.

^۲گروه مهندسی برق، دانشگاه شهید چمران اهواز-پردیس صنعتی شهدای هویزه، دشت آزادگان، خوزستان، ایران.

^۳گروه ریاضی و آمار، دانشگاه صنعتی خاتم الانبیا (ص) بهبهان، بهبهان، خوزستان، ایران.

چکیده

هدف: از آنجایی که مجموعه‌های نوتروسوفیک در زمینه‌های کاربردی مختلف الهام‌بخش تلاش‌های تحقیقاتی عظیمی برای مدل‌سازی مسائل از جنبه‌های مختلف شده‌اند، انگیزه و هدف اصلی این تحقیق ترکیب مسئله‌ی کاربردی حمل و نقل با هزینه‌های فازی مثلثی نوتروسوفیک و نحوه برخورد با این نوع از عدم قطعیت در فرآیند حل است.

روش‌شناسی پژوهش: برای این منظور، ابتدا یک روش رتبه‌بندی نوین برای محاسبه ارزش داده‌های فازی مثلثی نوتروسوفیک پیشنهاد شده است. اگر چه روش پیشنهادی قابلیت‌های لازم برای به کارگیری در حل مسائل بسیاری را دارد. در ادامه نیز با توجه به تمرکز این مطالعه بر روی مسئله حمل و نقل، الگوریتمی ترکیبی مبتنی بر روش رتبه‌بندی نوین مطرح شده با هزینه‌های فازی مثلثی نوتروسوفیک توضیح داده می‌شود. در انتها نیز کارایی و اثربخشی الگوریتم پیشنهادی در نرم‌افزار متلب برای یک مثال توضیحی آزمایش شده است.

یافته‌ها: یافته‌ها نشان می‌دهند که رویکرد ارایه‌شده با حفظ ساختار نوتروسوفیک داده‌ها، تعادلی میان دقت محاسباتی و کاهش اتلاف منابع برقرار کرده و راهکار مناسبی برای تصمیم‌گیری در شرایط ناپایداری و عدم قطعیت فراهم می‌نماید.

اصالت/ارزش افزوده علمی: این مطالعه با گسترش مرزهای نظری و کاربردی در حوزه نوتروسوفیک، زمینه‌ساز حل مسائل پیچیده‌تر در حوزه‌های تصمیم‌گیری و بهینه‌سازی تحت عدم قطعیت چندلایه است.

کلیدواژه‌ها: مساله حمل و نقل، مجموعه نوتروسوفیک، عدد فازی مثلثی نوتروسوفیک، روش رتبه‌بندی.

۱- مقدمه

یکی از شناخته‌شده‌ترین مسایل بهینه‌سازی، مساله حمل و نقل است که در بسیاری از برنامه‌های کاربردی واقعی به عنوان یک مساله جانبی در تحقیق در عملیات ظاهر می‌شود. به عنوان نمونه، مسایلی همچون فروشنده دوره‌گرد، مساله مسیر یابی و سایل نقلیه، مساله کوتاه‌ترین مسیر، مباحث مربوط به شبکه‌های جاده‌ای و شبکه‌های راه‌آهن در این دسته از مسایل قرار می‌گیرند. این موضوع به عنوان انگیزه‌ای برای تحقیق و تلاش در حل مساله حمل و نقل تحت شرایط گوناگون عمل می‌کند. هدف اولیه مساله حمل و نقل کاهش هزینه حمل و نقل برای مقدار معینی از کالا بین منابع (یا مبداها) و مقصدهای مختلف است. تصمیم‌گیرنده می‌خواهد اطمینان حاصل کند که مواد خام یا کالاهای نهایی به طور موثر جابه‌جا می‌شوند و در صورت نیاز، به راحتی در دسترس هستند. در مساله حمل و نقل کلاسیک، تصمیم‌گیرنده هزینه‌ها، مقادیر عرضه و تقاضا را به عنوان اعداد واقعی در نظر می‌گیرد. با این حال، نحوه بیان این پارامترها در سناریوهای واقعی بستگی به شرایط مساله دارد. از این رو، یافتن مقدار دقیق چنین پارامترهایی برای تصمیم‌گیرنده بسیار دشوار می‌باشد. در چنین سناریویی می‌توان از اعداد غیرقطعی برای نشان دادن آن متغیرها استفاده کرد.

با معرفی اعداد فازی نوتروسوفیک [1]، محققان به کاربردهای آن‌ها در مسایل علمی و مهندسی مانند علم تصمیم‌گیری، تشخیص الگو، پزشکی، شبکه‌سازی، تحلیل خوشه‌ای و ... علاقه‌مند شدند. به‌عنوان نمونه، چاکرابورتی و همکاران [2] یک روش رتبه‌بندی نوین برای قطعی‌سازی اعداد نوتروسوفیک پیشنهاد دادند. آن‌ها به کمک این مفهوم اعداد نوتروسوفیک را به یک عدد واضح تبدیل و از آن در تکنیک بررسی ارزیابی پروژه غیردقیق و مساله انتخاب مسیر استفاده کردند. سیکانان و شانموگاول [3] با تعیین میانگین هزینه‌های مشخص‌شده، به توضیح بهینه‌سازی مساله حمل و نقل فازی نوتروسوفیک طی تکنیکی دومرحله‌ای پرداختند. برای این منظور در مرحله اول، جدول کامل هزینه‌های احتمالی تشکیل شده و در مرحله دوم تخصیص بهینه انجام شده است. شین و همکاران [4]، یک ایده جدید به‌عنوان واژگان محاسباتی برای مدل‌سازی مسایل تحت کلمات توصیفی با استفاده از مجموعه‌های نوتروسوفیک پیشنهاد کردند. برای تفسیر بهتر موضوع آن‌ها مساله کمترین درخت پوشا را با واژگان طبیعی به‌عنوان ارزش‌هایی برای طول قوس یک شبکه نوتروسوفیک به کار بردند و برای حل مساله درخت پوشای کمینه تحت واژگان از یک مدل برنامه‌ریزی خطی استفاده کردند. در سال‌های اخیر، کومار و شارما [5] یک چارچوب نوین تصمیم‌گیری مبتنی بر منطق نوتروسوفیک برای بهینه‌سازی تخصیص در مسایل حمل و نقل ارائه کردند. مدل آن‌ها با در نظر گرفتن عدم قطعیت‌ها و عوامل کلیدی مانند هزینه، زمان و قابلیت اطمینان، به دنبال بهبود در پایدارسازی تخصیص‌ها نسبت به روش‌های سنتی است. در مطالعه دیگری، کامران و همکاران [6] یک طرح حمل و نقل با بهینه‌سازی هزینه‌ها از طریق تعدیل اجزای سازنده و استفاده از متغیرهای فازی گسترش‌یافته نوتروسوفیک ارائه دادند. آن‌ها دو سناریو شامل مساله حمل و نقل بازه‌ای (با داده‌های نوتروسوفیک فرمتن بازه‌ای) و مساله فازی (با اطلاعات نامشخص) را بررسی کردند.

در این مطالعه، ما مساله حمل و نقل را در یک محیط نوتروسوفیک ارزیابی می‌کنیم که در آن جدول هزینه‌های حمل و نقل نوتروسوفیک با اعداد نوتروسوفیک فازی مثلثی به‌عنوان عناصر اصلی آن بیان می‌شود. برای غلبه بر نحوه برخورد با عدم قطعیت ناشی از اعداد نوتروسوفیک فازی مثلثی از یک تابع امتیاز شهودی برای تبدیل مقادیر نوتروسوفیک فازی مثلثی به اعداد واضح معادل آن‌ها استفاده می‌کنیم و به دنبال آن طی یک روش گام‌به‌گام رویکرد پیشنهادی را برای به دست آوردن راه‌حل بهینه اجرا می‌کنیم.

۲- مفاهیم اصلی

در ابتدا برخی از مفاهیم ضروری مرتبط با اعداد نوتروسوفیک آورده شده است.

تعریف ۱- فرض کنید M مجموعه‌ای مشخص شده است. در این صورت مجموعه نوتروسوفیک $\tilde{N}$ روی M به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود: [1]

$$\tilde{N} = \{ \langle x, \mu_{\tilde{N}}(x), \pi_{\tilde{N}}(x), \rho_{\tilde{N}}(x) \rangle \mid 0 \leq \mu_{\tilde{N}}(x), \pi_{\tilde{N}}(x), \rho_{\tilde{N}}(x) \leq 1, x \in M \}, \quad (1)$$

که در آن $\mu_{\tilde{N}}, \pi_{\tilde{N}}, \rho_{\tilde{N}}: M \rightarrow [0,1]$ به ترتیب توابع متناظر با درجه درستی، ممتنع و نادرستی برای هر $x \in M$ نسبت به $\tilde{N}$ هستند. علاوه بر این، برای هر $x \in M$ رابطه $0 \leq \mu_{\tilde{N}}(x) + \pi_{\tilde{N}}(x) + \rho_{\tilde{N}}(x) \leq 3$ برقرار است.

تعریف ۲- برای عدد فازی نوتروسوفیک $\tilde{n} = \langle \mu_{\tilde{N}}(x), \pi_{\tilde{N}}(x), \rho_{\tilde{N}}(x) \rangle$ در M توابع عضویت، ممتنع و نادرستی به ترتیب زیر تعریف می‌شوند [7]:

$$\mu_{\bar{n}}(x) = \begin{cases} \mu_{\bar{n}}^l(x), & a_1 \leq x < a_2, \\ 1, & a_2 \leq x < a_3, \\ \mu_{\bar{n}}^r(x), & a_3 \leq x < a_4, \\ 0, & o.w. \end{cases} \quad (۲)$$

$$\pi_{\bar{n}}(x) = \begin{cases} \pi_{\bar{n}}^l(x), & b_1 \leq x < b_2, \\ 1, & b_2 \leq x < b_3, \\ \pi_{\bar{n}}^r(x), & b_3 \leq x < b_4, \\ 0, & o.w. \end{cases} \quad (۳)$$

$$\rho_{\bar{n}}(x) = \begin{cases} \rho_{\bar{n}}^l(x), & c_1 \leq x < c_2, \\ 1, & c_2 \leq x < c_3, \\ \rho_{\bar{n}}^r(x), & c_3 \leq x < c_4, \\ 0, & o.w. \end{cases} \quad (۴)$$

به طوری که روابط $0 \leq \mu_{\bar{n}}(x) + \pi_{\bar{n}}(x) + \rho_{\bar{n}}(x) \leq 3$ و $0 \leq \mu_{\bar{n}}(x), \pi_{\bar{n}}(x), \rho_{\bar{n}}(x) \leq 1$ نیز برقرار هستند.

تعریف ۳- فرض کنید M مجموعه ای مشخص شده است. در این صورت $\bar{n} = \langle (a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4), (c_1, c_2, c_3, c_4) \rangle$ یک عدد فازی دوزنقه ای نوتروسوفیک روی M است که در آن توابع عضویت، ممتنع و نادرستی به ترتیب زیر تعریف می شوند [7]:

$$\mu_{\bar{n}}(x) = \begin{cases} \frac{(x - a_1)}{a_2 - a_1}, & a_1 \leq x < a_2, \\ 1, & a_2 \leq x < a_3, \\ \frac{(a_4 - x)}{a_4 - a_3}, & a_3 \leq x < a_4, \\ 0, & o.w. \end{cases} \quad (۵)$$

$$\pi_{\bar{n}}(x) = \begin{cases} \frac{(b_2 - x)}{b_2 - b_1}, & b_1 \leq x < b_2, \\ 1, & b_2 \leq x < b_3, \\ \frac{(x - b_3)}{b_4 - b_3}, & b_3 \leq x < b_4, \\ 0, & o.w. \end{cases} \quad (۶)$$

$$\rho_{\bar{n}}(x) = \begin{cases} \frac{(c_2 - x)}{c_2 - c_1}, & c_1 \leq x < c_2, \\ 1, & c_2 \leq x < c_3, \\ \frac{(x - c_3)}{c_4 - c_3}, & c_3 \leq x < c_4, \\ 0, & o.w. \end{cases} \quad (۷)$$

به طوری که روابط $0 \leq \mu_{\bar{n}}(x) + \pi_{\bar{n}}(x) + \rho_{\bar{n}}(x) \leq 3$ و $0 \leq \mu_{\bar{n}}(x), \pi_{\bar{n}}(x), \rho_{\bar{n}}(x) \leq 1$ نیز برقرار هستند.

تبصره: اگر برای عدد فازی دوزنقه ای نوتروسوفیک $\bar{n} = \langle (a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4), (c_1, c_2, c_3, c_4) \rangle$ روابط $a_2 = a_3$ و $b_2 = b_3$ و $c_2 = c_3$ برقرار باشند، آنگاه یک عدد فازی مثلثی نوتروسوفیک با نمایشی به صورت $\bar{n} = \langle (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3) \rangle$ داریم.

تعریف ۴- اگر دو عدد فازی دوزنقه ای نوتروسوفیک روی M به صورت زیر تعریف شده باشند [7]:

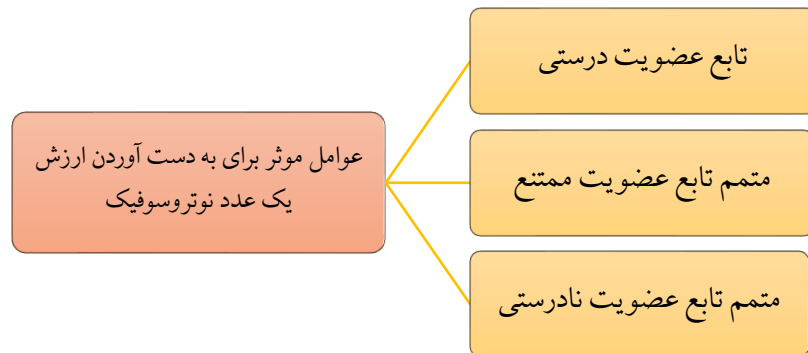
$$\bar{n}_1 = \left\langle (a_{1\bar{n}_1}, a_{2\bar{n}_1}, a_{3\bar{n}_1}, a_{4\bar{n}_1}), (b_{1\bar{n}_1}, b_{2\bar{n}_1}, b_{3\bar{n}_1}, b_{4\bar{n}_1}), (c_{1\bar{n}_1}, c_{2\bar{n}_1}, c_{3\bar{n}_1}, c_{4\bar{n}_1}) \right\rangle.$$

$$\bar{n}_2 = \left\langle (a_{1\bar{n}_2}, a_{2\bar{n}_2}, a_{3\bar{n}_2}, a_{4\bar{n}_2}), (b_{1\bar{n}_2}, b_{2\bar{n}_2}, b_{3\bar{n}_2}, b_{4\bar{n}_2}), (c_{1\bar{n}_2}, c_{2\bar{n}_2}, c_{3\bar{n}_2}, c_{4\bar{n}_2}) \right\rangle.$$

$$\tilde{n}_1 \oplus \tilde{n}_2 = \langle (a_{1\tilde{n}_1} + a_{1\tilde{n}_2} - a_{1\tilde{n}_1}a_{1\tilde{n}_2}, a_{2\tilde{n}_1} + a_{2\tilde{n}_2} - a_{2\tilde{n}_1}a_{2\tilde{n}_2}, a_{3\tilde{n}_1} + a_{3\tilde{n}_2} - a_{3\tilde{n}_1}a_{3\tilde{n}_2}, a_{4\tilde{n}_1} + a_{4\tilde{n}_2} - a_{4\tilde{n}_1}a_{4\tilde{n}_2}), (b_{1\tilde{n}_1}b_{1\tilde{n}_2}, b_{2\tilde{n}_1}b_{2\tilde{n}_2}, b_{3\tilde{n}_1}b_{3\tilde{n}_2}, b_{4\tilde{n}_1}b_{4\tilde{n}_2}), (c_{1\tilde{n}_1}c_{1\tilde{n}_2}, c_{2\tilde{n}_1}c_{2\tilde{n}_2}, c_{3\tilde{n}_1}c_{3\tilde{n}_2}, c_{4\tilde{n}_1}c_{4\tilde{n}_2}) \rangle.$$

۳- ساختاری مفهومی برای مقایسه اعداد فازی مثلثی نوتروسوفیک

اکنون طرحی معنادار برای رتبه بندی اعداد فازی مثلثی نوتروسوفیک ارائه می دهیم. ساختار مفهومی این ایده در شکل ۱ آورده شده است.



شکل ۱- عوامل موثر برای تعیین رتبه عدد نوتروسوفیک.

Figure 1- Factors influencing the ranking of the neutrosophic number.

برای این منظور یک عدد فازی مثلثی نوتروسوفیک به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$\tilde{n}_i = \langle (a_{1\tilde{n}_i}, a_{2\tilde{n}_i}, a_{3\tilde{n}_i}), (b_{1\tilde{n}_i}, b_{2\tilde{n}_i}, b_{3\tilde{n}_i}), (c_{1\tilde{n}_i}, c_{2\tilde{n}_i}, c_{3\tilde{n}_i}) \rangle.$$

فرمول های خط چپ و راست تابع درستی، متمم تابع ممتنع و متمم نادرستی را برای $\tilde{n}_i$ نسبت به خط عمودی $\omega = 0$ می توان به ترتیب زیر در نظر گرفت:

$$[\sigma^{l_{\tilde{n}_i}}(\omega), \sigma^{r_{\tilde{n}_i}}(\omega)] = [(a_{1\tilde{n}_i}) + \omega(a_{2\tilde{n}_i} - a_{1\tilde{n}_i}), (a_{3\tilde{n}_i}) + \omega(a_{2\tilde{n}_i} - a_{3\tilde{n}_i})]. \quad (8)$$

$$[\tau^{l_{\tilde{n}_i}}(\omega), \tau^{r_{\tilde{n}_i}}(\omega)] = [(b_{1\tilde{n}_i}) + \omega(b_{2\tilde{n}_i} - b_{1\tilde{n}_i}), (b_{3\tilde{n}_i}) + \omega(b_{2\tilde{n}_i} - b_{3\tilde{n}_i})]. \quad (9)$$

$$[\varphi^{l_{\tilde{n}_i}}(\omega), \varphi^{r_{\tilde{n}_i}}(\omega)] = [(c_{1\tilde{n}_i}) + \omega(c_{2\tilde{n}_i} - c_{1\tilde{n}_i}), (c_{3\tilde{n}_i}) + \omega(c_{2\tilde{n}_i} - c_{3\tilde{n}_i})]. \quad (10)$$

در این حالت، مساحت نیمه چپ و راست تابع درستی نسبت به $\omega = 0$ می توانند به صورت زیر بیان شوند:

$$\mathcal{S}^{l_{\mu}}(\tilde{n}_i) = \int_0^1 ((a_{1\tilde{n}_i}) + \omega(a_{2\tilde{n}_i} - a_{1\tilde{n}_i})) d\omega = (a_{1\tilde{n}_i}) + \frac{(a_{2\tilde{n}_i} - a_{1\tilde{n}_i})}{2}. \quad (11)$$

$$\mathcal{S}^{r_{\mu}}(\tilde{n}_i) = \int_0^1 ((a_{3\tilde{n}_i}) + \omega(a_{2\tilde{n}_i} - a_{3\tilde{n}_i})) d\omega = (a_{3\tilde{n}_i}) + \frac{(a_{2\tilde{n}_i} - a_{3\tilde{n}_i})}{2}. \quad (12)$$

به صورت مشابه برای متمم تابع ممتنع و متمم تابع نادرستی رابطه (۱۳) تا رابطه (۱۶) را داریم.

$$\mathcal{S}^{l\pi}(\tilde{n}_i) = \int_0^1 \left(b_{1\tilde{n}_i} + \omega(b_{2\tilde{n}_i} - b_{1\tilde{n}_i}) \right) d\omega = \left(b_{1\tilde{n}_i} \right) + \frac{(b_{2\tilde{n}_i} - b_{1\tilde{n}_i})}{2}. \quad (13)$$

$$\mathcal{S}^{r\pi}(\tilde{n}_i) = \int_0^1 \left(b_{3\tilde{n}_i} + \omega(b_{2\tilde{n}_i} - b_{4\tilde{n}_i}) \right) d\omega = \left(b_{3\tilde{n}_i} \right) + \frac{(b_{2\tilde{n}_i} - b_{3\tilde{n}_i})}{2}. \quad (14)$$

$$\mathcal{S}^{lp}(\tilde{n}_i) = \int_0^1 \left(c_{1\tilde{n}_i} + \omega(c_{2\tilde{n}_i} - c_{1\tilde{n}_i}) \right) d\omega = \left(c_{1\tilde{n}_i} \right) + \frac{(c_{2\tilde{n}_i} - c_{1\tilde{n}_i})}{2}. \quad (15)$$

$$\mathcal{S}^{rp}(\tilde{n}_i) = \int_0^1 \left(c_{3\tilde{n}_i} + \omega(c_{2\tilde{n}_i} - c_{4\tilde{n}_i}) \right) d\omega = \left(c_{3\tilde{n}_i} \right) + \frac{(c_{2\tilde{n}_i} - c_{3\tilde{n}_i})}{2}. \quad (16)$$

تعریف ۵- برای $\tilde{n}_i = \left\langle (a_{1\tilde{n}_i}, a_{2\tilde{n}_i}, a_{3\tilde{n}_i}), (b_{1\tilde{n}_i}, b_{2\tilde{n}_i}, b_{3\tilde{n}_i}), (c_{1\tilde{n}_i}, c_{2\tilde{n}_i}, c_{3\tilde{n}_i}) \right\rangle$ بر اساس رابطه (۱۱) تا رابطه (۱۶)، تابع امتیاز به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\tilde{n}_i) &= \frac{1}{6} \left\{ \mathcal{S}^{l\mu}(\tilde{n}_i) + \mathcal{S}^{r\mu}(\tilde{n}_i) + \mathcal{S}^{l\pi}(\tilde{n}_i) + \mathcal{S}^{r\pi}(\tilde{n}_i) + \mathcal{S}^{lp}(\tilde{n}_i) + \mathcal{S}^{rp}(\tilde{n}_i) \right\} \\ &= \frac{1}{6} \left\{ \begin{aligned} &\left(a_{1\tilde{n}_i} \right) + \frac{(a_{2\tilde{n}_i} - a_{1\tilde{n}_i})}{2} + \left(a_{3\tilde{n}_i} \right) + \frac{(a_{2\tilde{n}_i} - a_{3\tilde{n}_i})}{2} + \left(b_{1\tilde{n}_i} \right) + \frac{(b_{2\tilde{n}_i} - b_{1\tilde{n}_i})}{2} + \\ &\left(b_{3\tilde{n}_i} \right) + \frac{(b_{2\tilde{n}_i} - b_{3\tilde{n}_i})}{2} + \left(c_{1\tilde{n}_i} \right) + \frac{(c_{2\tilde{n}_i} - c_{1\tilde{n}_i})}{2} + \left(c_{3\tilde{n}_i} \right) + \frac{(c_{2\tilde{n}_i} - c_{3\tilde{n}_i})}{2} \end{aligned} \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

قضیه ۱- اگر دو عدد فازی مثلثی نوتروسوفیک روی M به صورت زیر داشته باشیم:

$$\begin{aligned} \tilde{n}_1 &= \left\langle (a_{1\tilde{n}_1}, a_{2\tilde{n}_1}, a_{3\tilde{n}_1}), (b_{1\tilde{n}_1}, b_{2\tilde{n}_1}, b_{3\tilde{n}_1}), (c_{1\tilde{n}_1}, c_{2\tilde{n}_1}, c_{3\tilde{n}_1}) \right\rangle. \\ \tilde{n}_2 &= \left\langle (a_{1\tilde{n}_2}, a_{2\tilde{n}_2}, a_{3\tilde{n}_2}), (b_{1\tilde{n}_2}, b_{2\tilde{n}_2}, b_{3\tilde{n}_2}), (c_{1\tilde{n}_2}, c_{2\tilde{n}_2}, c_{3\tilde{n}_2}) \right\rangle. \end{aligned}$$

آنگاه داریم

$$\mathcal{R}(\tilde{n}_1 \oplus \tilde{n}_2) \geq \max\{\mathcal{R}(\tilde{n}_1), \mathcal{R}(\tilde{n}_2)\}.$$

برهان: فرض کنید دو عدد فازی نوتروسوفیک مثلثی به صورت زیر داریم:

$$\begin{aligned} \tilde{n}_1 &= \left\langle (a_{1\tilde{n}_1}, a_{2\tilde{n}_1}, a_{3\tilde{n}_1}), (b_{1\tilde{n}_1}, b_{2\tilde{n}_1}, b_{3\tilde{n}_1}), (c_{1\tilde{n}_1}, c_{2\tilde{n}_1}, c_{3\tilde{n}_1}) \right\rangle. \\ \tilde{n}_2 &= \left\langle (a_{1\tilde{n}_2}, a_{2\tilde{n}_2}, a_{3\tilde{n}_2}), (b_{1\tilde{n}_2}, b_{2\tilde{n}_2}, b_{3\tilde{n}_2}), (c_{1\tilde{n}_2}, c_{2\tilde{n}_2}, c_{3\tilde{n}_2}) \right\rangle. \end{aligned}$$

در این صورت با استفاده از تعریف ۴ و رابطه (۱۷) رتبه مجموع به صورت زیر به دست می آید:

$$\mathcal{R}(\tilde{n}_1 \oplus \tilde{n}_2) = \mathcal{R}((a_{1\tilde{n}_1} + a_{1\tilde{n}_2} - a_{1\tilde{n}_1}a_{1\tilde{n}_2}, a_{2\tilde{n}_1} + a_{2\tilde{n}_2} - a_{2\tilde{n}_1}a_{2\tilde{n}_2}, a_{3\tilde{n}_1} + a_{3\tilde{n}_2} - a_{3\tilde{n}_1}a_{3\tilde{n}_2}), (b_{1\tilde{n}_1}b_{1\tilde{n}_2}, b_{2\tilde{n}_1}b_{2\tilde{n}_2}, b_{3\tilde{n}_1}b_{3\tilde{n}_2}), (c_{1\tilde{n}_1}c_{1\tilde{n}_2}, c_{2\tilde{n}_1}c_{2\tilde{n}_2}, c_{3\tilde{n}_1}c_{3\tilde{n}_2}))$$

$$= \frac{1}{6} \left[\begin{aligned} & \left((a_{1\tilde{n}_1} + a_{1\tilde{n}_2} - a_{1\tilde{n}_1}a_{1\tilde{n}_2}) + \frac{((a_{2\tilde{n}_1} + a_{2\tilde{n}_2} - a_{2\tilde{n}_1}a_{2\tilde{n}_2}) - (a_{1\tilde{n}_1} + a_{1\tilde{n}_2} - a_{1\tilde{n}_1}a_{1\tilde{n}_2}))}{2} \right) + \\ & \left((a_{3\tilde{n}_1} + a_{3\tilde{n}_2} - a_{3\tilde{n}_1}a_{3\tilde{n}_2}) + \frac{((a_{2\tilde{n}_1} + a_{2\tilde{n}_2} - a_{2\tilde{n}_1}a_{2\tilde{n}_2}) - (a_{3\tilde{n}_1} + a_{3\tilde{n}_2} - a_{3\tilde{n}_1}a_{3\tilde{n}_2}))}{2} \right) + \\ & (b_{1\tilde{n}_1}b_{1\tilde{n}_2}) + \frac{(b_{2\tilde{n}_1}b_{2\tilde{n}_2} - b_{1\tilde{n}_1}b_{1\tilde{n}_2})}{2} + (b_{3\tilde{n}_1}b_{3\tilde{n}_2}) + \frac{(b_{2\tilde{n}_1}b_{2\tilde{n}_2} - b_{3\tilde{n}_1}b_{3\tilde{n}_2})}{2} \\ & + (c_{1\tilde{n}_1}c_{1\tilde{n}_2}) + \frac{(c_{2\tilde{n}_1}c_{2\tilde{n}_2} - c_{1\tilde{n}_1}c_{1\tilde{n}_2})}{2} + (c_{3\tilde{n}_1}c_{3\tilde{n}_2}) + \frac{(c_{2\tilde{n}_1}c_{2\tilde{n}_2} - c_{3\tilde{n}_1}c_{3\tilde{n}_2})}{2} \end{aligned} \right]$$

از این رو

$$\mathcal{R}(\tilde{n}_1 \oplus \tilde{n}_2) \geq \max \left\{ \frac{1}{6} \left[\begin{aligned} & \left((a_{1\tilde{n}_1}) + \frac{(a_{2\tilde{n}_1} - a_{1\tilde{n}_1})}{2} + (a_{3\tilde{n}_1}) + \frac{(a_{2\tilde{n}_1} - a_{3\tilde{n}_1})}{2} + (b_{1\tilde{n}_1}) + \frac{(b_{2\tilde{n}_1} - b_{1\tilde{n}_1})}{2} + \right. \\ & \left. (b_{3\tilde{n}_1}) + \frac{(b_{2\tilde{n}_1} - b_{3\tilde{n}_1})}{2} + (c_{1\tilde{n}_1}) + \frac{(c_{2\tilde{n}_1} - c_{1\tilde{n}_1})}{2} + (c_{3\tilde{n}_1}) + \frac{(c_{2\tilde{n}_1} - c_{3\tilde{n}_1})}{2} \right) \\ & \left. \frac{1}{6} \left[\begin{aligned} & \left((a_{1\tilde{n}_2}) + \frac{(a_{2\tilde{n}_2} - a_{1\tilde{n}_2})}{2} + (a_{3\tilde{n}_2}) + \frac{(a_{2\tilde{n}_2} - a_{3\tilde{n}_2})}{2} + (b_{1\tilde{n}_2}) + \frac{(b_{2\tilde{n}_2} - b_{1\tilde{n}_2})}{2} + \right. \\ & \left. (b_{3\tilde{n}_2}) + \frac{(b_{2\tilde{n}_2} - b_{3\tilde{n}_2})}{2} + (c_{1\tilde{n}_2}) + \frac{(c_{2\tilde{n}_2} - c_{1\tilde{n}_2})}{2} + (c_{3\tilde{n}_2}) + \frac{(c_{2\tilde{n}_2} - c_{3\tilde{n}_2})}{2} \right) \end{aligned} \right] \right\}.$$

بنابراین حکم اثبات است.

۴- مساله حمل و نقل گسترش یافته

همان گونه که در مقدمه ذکر شد، مساله حمل و نقل به عنوان یک مساله بهینه سازی برجسته شناخته شده است که کاربردهای مختلفی در زندگی واقعی دارد. از این رو، در ادامه می خواهیم روشی ترکیبی برای حل مساله حمل و نقل با هزینه های فازی مثلثی نوترو سوفیک به کمک رابطه (۱۷) ارائه دهیم. بنابراین ابتدا مساله حمل و نقل را در حالت کلی تفسیر می کنیم.

تعریف ۶- مساله حمل و نقل یک نوع خاص از مسایل برنامه ریزی خطی است که در آن کالاها باید از مجموعه ای از منابع به مجموعه ای از مقصدها انتقال داده شوند و در عین حال ضمن در نظر گرفتن میزان عرضه و تقاضا در هر مکان، هزینه کلی حمل و نقل نیز کمینه شود. فرمول بندی کلی مساله حمل و نقل به صورت زیر خلاصه شده است.

$$\min z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij}$$

$$s. t. \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$x_{ij} \geq 0,$$

که در آن c_{ij} هزینه قطعی برای ارسال کالا از مبدا i th به مقصد j th است. یک مساله حمل و نقل معمولاً شامل m ردیف و n ستون است که ردیف ها منبع ها و ستون ها مقصد را نشان می دهند. مقدار عرضه از هر منبع و حجم تقاضا در هر مقصد به عنوان مقادیر شناخته شده در نظر گرفته می شود. هزینه های حمل و نقل هر واحد کالا بین مبدا و مقصد مشخص است.

هدف اصلی تعیین مقداری است که باید از هر منبع به هر مقصد منتقل شود تا هزینه کلی حمل و نقل تا حد امکان کم شود. اگر دقیقاً $m + n - 1$ متغیرهای اساسی وجود داشته باشد، مساله قابل حل است. گاهی از این مساله به عنوان مساله هیچکاک یاد می شود.

عمدتاً دو نوع کلی از مسایل حمل و نقل وجود دارد:

۱. متعادل: اگر عرضه و تقاضا هر دو برابر باشند.
۲. نامتعادل: اگر عرضه و تقاضا برابر نباشند. در این حالت یک ردیف یا یک ستون ساختگی را در صورت لزوم اضافه می کنند تا آن را به یک مساله حمل و نقل متعادل تبدیل کنند.

مساله حمل و نقل تحت هزینه های فازی مثلثی نوتروسوفیک به صورت زیر ارایه می شود:

$$\begin{aligned} \min z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{c}_{ij} x_{ij} \\ \text{s. t. } \sum_{j=1}^n x_{ij} &= a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ x_{ij} &\geq 0, \end{aligned}$$

که در آن m تعداد منابع، n تعداد مقصدها، a_i میزان عرضه در مبدا i^{th} ، b_j میزان تقاضا در مقصد j^{th} ، x_{ij} هزینه ارسال هر واحد کالا از مبدا i^{th} به مقصد j^{th} و $\tilde{c}_{ij} = \langle (a_{1\tilde{c}_{ij}}, a_{2\tilde{c}_{ij}}, a_{3\tilde{c}_{ij}}), (b_{1\tilde{c}_{ij}}, b_{2\tilde{c}_{ij}}, b_{3\tilde{c}_{ij}}), (c_{1\tilde{c}_{ij}}, c_{2\tilde{c}_{ij}}, c_{3\tilde{c}_{ij}}) \rangle$ هزینه ارسال هر واحد کالا از مبدا i^{th} به مقصد j^{th} است که با عدد فازی مثلثی نوتروسوفیک نشان داده می شود.

برای حل فرآیند ترکیبی ارایه شده در الگوریتم ۱ پیشنهاد می شود.

الگوریتم ۱ - (مرحله آغازین (آماده سازی)): ابتدا جدول اطلاعات فازی مثلثی نوتروسوفیک مربوط به هزینه حمل و نقل هر واحد و داده های قطعی مربوط به میزان عرضه و تقاضای واحدها را تشکیل دهید.

مرحله ۱ - سپس با استفاده از رابطه (۱۷) هر یک از اعداد فازی مثلثی نوتروسوفیک مربوط به هزینه ها را به عدد قطعی متناظر با آن تبدیل کنید.

علاوه بر این، بررسی کنید که آیا مساله حمل و نقل در نظر گرفته شده متعادل است یا خیر.

اگر بله، به **مرحله ۲** بروید و اگر نامتعادل است، با اضافه کردن یک ردیف ساختگی یا یک ستون ساختگی متناسب با نیاز موقعیت، آن را متعادل کنید و سپس به **مرحله ۲** بروید.

مرحله ۲ - ابتدا سطر و ستون مربوط به جریمه ها (اختلاف بیشترین و کمترین هزینه ها در هر سطر یا ستون) را به جدول قطعی شده اضافه کنید. سپس، متغیر متناظر با سطر یا ستونی که بیشترین جریمه را دارد بر اساس مقدار مینیمم بین عرضه و تقاضای نظیر آن مقداردهی کنید.

در ادامه عرضه و تقاضا را تعدیل کنید واضح است که باید سطر یا ستون با مقدار عرضه یا تقاضای صفر از جدول حذف شود. علاوه بر این، برخی جریمه ها نیز ممکن است نیاز به به روز رسانی داشته باشند. این فرآیند را تا زمانی که تمامی سطر و ستون ها از جدول حذف شوند ادامه می دهیم.

برای بررسی بهتر عملکرد این الگوریتم مثالی عددی در بخش بعد مورد ارزیابی قرار گرفته است.

۵- نتایج عددی

در این بخش، کارایی الگوریتم پیشنهادی برای حل مساله حمل و نقل با هزینه های فازی مثلثی نوتروسوفیک از طریق یک مثال عددی مورد بررسی قرار گرفته است. داده های اولیه مساله در **جدول ۱** ارایه شده است که شامل سه منبع s_1, s_2 و s_3 و سه مقصد g_1, g_2 و g_3 با مقادیر عرضه و تقاضای مشخص است. هزینه های حمل و نقل هر واحد کالا به صورت اعداد فازی مثلثی نوتروسوفیک تعریف شده اند.

برای مثال، هزینه انتقال از s_1 به g_1 به صورت $\langle (1,4,7), (1,3,5), (3,5,6,7,5) \rangle$ بیان شده است.

جدول ۱- اطلاعات مساله حمل و نقل بر اساس هزینه های فازی مثلثی نوتروسوفیک.

Table 1- Transportation problem information based on Neutrosophic triangular fuzzy costs.

	g_1	g_2	g_3	تقاضا
s_1	$\langle (1,4,7), (1,3,5), (3,5,6,7,5) \rangle$	$\langle (0,5,2,5,4,5), (1,2,3), (1,5,3,5,5,5) \rangle$	$\langle (1,3,5), (0,5,1,5,3,5), (2,4,6) \rangle$	15
s_2	$\langle (1,2,3), (0,5,1,5,2,5), (1,5,2,5,3,5) \rangle$	$\langle (1,1,5,4), (0,5,1,2,5), (1,2,5,3,4,2,5) \rangle$	$\langle (1,5,2,5,3,5), (1,1,5,3), (2,3,4) \rangle$	25
s_3	$\langle (2,4,6), (1,5,2,5,4,5), (3,5,4) \rangle$	$\langle (1,5,8), (1,5,4,5,7,5), (4,6,5,9) \rangle$	$\langle (1,5,8), (1,5,3,6,5), (4,7,9) \rangle$	20
عرضه	18	20	22	

اکنون با استفاده از رابطه (۱۷) که مبتنی بر محاسبه مساحت نیمه چپ و راست توابع درستی، ممتنع و نادرستی است، هر عدد فازی مثلثی نوتروسوفیک به یک مقدار قطعی تبدیل شده است. این تبدیل با انتگرال گیری از توابع خطی هر مولفه و میانگین گیری از نتایج انجام می شود. این فرآیند برای تمام سلول ها تکرار شده و نتایج در جدول ۲ نمایش داده شده اند.

جدول ۲- اطلاعات مساله حمل و نقل بر اساس هزینه قطعی.

Table 2 - Information on the transportation problem based on firm cost.

	g_1	g_2	g_3	تقاضا	جریمه ستونی	مرحله حذف سطر
s_1	4.25	2.67	2.83	15	1/58	5
s_2	2	2.04	2.42	25	0/42	2
s_3	3.92	5.25	5	20	1/33	4
عرضه	18	20	22	60		
جریمه سطری	25.2	21.3	8.2			
مرحله حذف ستون		1	3			

پس از قطبی سازی، مساله به یک فرم کلاسیک حمل و نقل تبدیل شده است. با توجه به متعادل بودن مساله (مجموع عرضه و تقاضا برابر با ۶۰ واحد)، الگوریتم ۱ با محاسبه جریمه های سطری و ستونی اجرا شد. اولویت دهی به سطرها و ستون ها بر اساس بیشترین جریمه، تخصیص بهینه را تسهیل می کند. به عنوان نمونه در مرحله اول ستون دوم که بیشترین جریمه را دارد انتخاب شده است.

نتایج نهایی نشان می دهد که مقدار بهینه تابع هدف برابر با ۲۱۳/۴۱ است. این مقدار با تخصیص مقادیر زیر حاصل شده است.

$$x_{11} = 15, x_{22} = 20, x_{23} = 5, x_{31} = 3, x_{33} = 17, x_{12} = x_{13} = x_{21} = x_{32} = 0.$$

تحلیل این نتایج نشان می دهد که الگوریتم پیشنهادی قادر است عدم قطعیت ذاتی در داده های فازی نوتروسوفیک را به طور موثری مدیریت کند و راه حلی کارآمد ارائه دهد. مقایسه این روش با رویکردهای مرسوم (مانند میانگین گیری ساده یا روش های مبتنی بر قطعیت جزئی) نشانگر بهبود در دقت و انعطاف پذیری آن است، چراکه هر سه مولفه نوتروسوفیک (درستی، ممتنع و نادرستی) در محاسبات لحاظ شده اند. این امر به ویژه در محیط های تصمیم گیری با اطلاعات ناقص یا متناقض، از مزایای کلیدی روش محسوب می شود.

۶- نتیجه گیری و پیشنهادها

این مطالعه با ارائه یک روش رتبه بندی مفهومی مبتنی بر اعداد فازی مثلثی نوتروسوفیک، گامی موثر در جهت مدیریت عدم قطعیت در مساله حمل و نقل برداشت. روش پیشنهادی با تعریف تابع امتیاز یکپارچه (رابطه ۱۷)، که هر سه مولفه نوتروسوفیک (درستی، ممتنع، و نادرستی) را در محاسبات دخیل می کند، امکان تبدیل داده های فازی پیچیده به مقادیر قطعی را فراهم نمود. از سوی دیگر قضیه ۱ برای تبیین صحت روش رتبه بندی مطرح شده اثبات شده است. کارایی روش را نیز در الگوریتمی دومرحله ای برای حل مساله حمل و نقل آزمودیم این رویکرد نه تنها تعامل بین پارامترهای غیرقطعی را به صورت سیستماتیک مدل سازی کرد، بلکه از طریق ادغام با الگوریتم دومرحله ای (قطعی سازی و تخصیص بهینه)، راه حلی کارآمد برای مساله حمل و نقل تحت شرایط نادقیق ارائه داد. نتایج عددی نشان داد که روش مذکور قادر است با حفظ ساختار نوتروسوفیک داده ها،

توازن میان دقت محاسباتی و پیچیدگی مساله ایجاد کند، به طوری که مقدار بهینه تابع هدف با کمترین اتلاف منابع حاصل شد. این پژوهش نه تنها به غنای ادبیات نوتروسوفیک در حوزه بهینه‌سازی کمک می‌کند، بلکه راه را برای حل مسایل پیچیده‌تر در شرایط عدم قطعیت چندلایه هموار می‌سازد.

از جمله مزایای کلیدی این پژوهش می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱. جامعیت در مدل‌سازی عدم قطعیت: استفاده هم‌زمان از سه مولفه نوتروسوفیک، امکان نمایش واقعی‌تری از عدم قطعیت در هزینه‌های حمل‌ونقل را فراهم می‌کند.
۲. سازگاری با مسایل مقیاس‌پذیر: الگوریتم پیشنهادی با وجود سادگی، قابلیت تعمیم به مسایل با ابعاد بزرگ‌تر را دارد.
۳. کاربردپذیری در سناریوهای واقعی: نتایج عددی نشانگر آن است که این روش می‌تواند در صنایع لجستیک، زنجیره تامین، و برنامه‌ریزی شهری مورد استفاده قرار گیرد.

با این حال، محدودیت‌هایی نیز در این مطالعه وجود دارد که زمینه را برای پژوهش‌های آینده فراهم می‌کند:

۱. توسعه مدل: در نظر گرفتن مقادیر عرضه و تقاضا نیز به صورت اعداد نوتروسوفیک علاوه بر هزینه‌های نوتروسوفیک.
۲. تحلیل حساسیت پارامترها: بررسی تاثیر تغییرات پارامترهای نوتروسوفیک (مانند بازه‌های عضویت) بر روی راه حل نهایی.
۳. تعمیم به مسایل چندهدفه: توسعه چارچوبی برای حل مسایل حمل‌ونقل با اهدافی مانند کمینه‌سازی هزینه و زمان به طور هم‌زمان.
۴. پیاده‌سازی در پلتفرم‌های صنعتی: طراحی نرم‌افزارهای کاربردی با قابلیت پردازش داده‌های نوتروسوفیک در زمان واقعی.

همچنین پیشنهاد می‌شود در مطالعات آتی، مقایسه سیستماتیک این روش با سایر روش‌های رتبه‌بندی اعداد نوتروسوفیک انجام گیرد تا مزایا و چالش‌های هر یک در محیط‌های مختلف شبیه‌سازی شود. به طور خاص، اثبات قضایا و ویژگی‌های بیشتر مربوط به روش رتبه‌بندی پیشنهادی برای اعداد فازی مثلثی نوتروسوفیک در تحقیقات آتی مورد توجه است.

منابع

- [1] Smarandache, F. (1999). A unifying field in logics: Neutrosophic logic, neutrosophy, neutrosophic set, neutrosophic probability. In *American research press* (pp. 1–141). American Research Press. <http://cogprints.org/1919/>
- [2] Chakraborty, A., Mondal, S. P., Ahmadian, A., Senu, N., Alam, S., & Salahshour, S. (2018). Different forms of triangular neutrosophic numbers, de-neutrosophication techniques, and their applications. *Symmetry*, 10(8), 327. <https://doi.org/10.3390/sym10080327>
- [3] Sikkannan, K. P., & Shanmugavel, V. (2019). Unraveling neutrosophic transportation problem using costs mean and complete contingency cost table. In *neutrosophic sets and systems* (pp. 165–173). Infinite Study. <https://doi.org/10.5281/zenodo.3514424>
- [4] Xin, L., Zhou, B., Lin, H., & Dey, A. (2020). A novel approach of computing with words by using neutrosophic information. *IAENG international journal of computer science*, 47(2), 162–171. https://www.iaeng.org/IJCS/issues_v47/issue_2/IJCS_47_2_04.pdf
- [5] Kumar, T., & Sharma, M. K. (2024). Neutrosophic decision-making for allocations in solid transportation problems. *Opsearch*, 1–27. <https://doi.org/10.1007/s12597-024-00819-4>
- [6] Kamran, M., Nadeem, M., Żywiołek, J., Abdalla, M. E. M., Uzair, A., & Ishtiaq, A. (2024). Enhancing transportation efficiency with interval-valued fermatean neutrosophic numbers: A multi-item optimization approach. *Symmetry*, 16(6), 766. <https://doi.org/10.3390/sym16060766>
- [7] Biswas, P., Pramanik, S., & Giri, B. C. (2019). A new methodology for neutrosophic multi-attribute decision-making with unknown weight information. *Neutrosophic sets and systems*, 3(2014), 42–50. <https://fs.unm.edu/ANewMethodology.pdf>