

**Paper Type: Original Article****Evaluation and Analysis of Cost Efficiency Sustainability with Certain Prices****Farhad Hosseinzadeh Lotfi*** *Department of Mathematics, Research Sciences Unit, Islamic Azad University, Tehran, Iran; farhad@hosseinzadeh.ir.***Citation:**

Hosseinzadeh Lotfi, F. (2025). Evaluation and analysis of cost efficiency sustainability with certain prices. *Management: Modeling, analysis and applications*, 2(1), 20-31.

Received: 08/04/2024

Reviewed: 01/08/2024

Revised: 25/10/2024

Accepted: 16/12/2024

Abstract

Objective: This paper evaluates and analyzes the sustainability of Cost Efficiency (CE) assuming certain prices. While CE depends on accurate price information, continuous price fluctuations in the real world limit the use of fixed prices to short-term periods.

Method: In this study, sensitivity analysis has been used to examine the sustainability of CE instead of existing methods with uncertain prices. In this regard, indicators have been presented to predict the risk of bankruptcy or improvement of the economic situation of units. First, basic Data Envelopment Analysis (DEA) models and various CE models have been introduced. Then, using sensitivity analysis, the concept of sustainability cones has been developed and examined in a practical example.

Findings: The study's results show that assessing the sustainability of CE with firm prices can be an efficient tool in economic decision-making, forecasting market conditions, and formulating strategic policies. It can also help analysts better manage risks arising from market fluctuations.

Originality: This study lies in its innovative approach to analyzing the sustainability of CE using firm prices without relying on conventional models based on uncertain prices, which are sometimes accompanied by challenges and limitations. By using sensitivity analysis and introducing the concept of "Sustainability Cones," this study provides a conceptual and operational framework for risk assessment, bankruptcy prediction, and improving the economic position of units. Such an approach can be an effective and reliable alternative to analyses based on uncertain data and open new horizons in financial analysis and strategic decision-making.

Keywords: Sustainability, Cost efficiency, Bankruptcy.



Corresponding Author: farhad@hosseinzadeh.ir

<https://doi.org/10.22105/mmaa.v1i1.59>

Licensee. **Management: Modeling, Analysis and Application**. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>).



ارزیابی و تحلیل پایداری کارایی هزینه با قیمت های قطعی

فرهاد حسین زاده لطفی

گروه ریاضی، واحد علوم تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران.

چکیده

هدف: این مقاله به ارزیابی و تحلیل پایداری کارایی هزینه^۱ با فرض قیمت های قطعی می پردازد. درحالی که مفهوم CE به اطلاعات دقیق قیمتی وابسته است، نوسانات مداوم قیمت در دنیای واقعی استفاده از قیمت های ثابت را به بازه های کوتاه مدت محدود می کند.

روش: در این پژوهش، به جای بهره گیری از روش های موجود با قیمت های ناقص، از تحلیل حساسیت برای بررسی پایداری CE استفاده شده است. در همین راستا، شاخص هایی برای پیش بینی ریسک ورشکستگی یا بهبود وضعیت اقتصادی واحدها ارائه گردیده است. ابتدا مدل های پایه ای تحلیل پوششی داده ها^۲ و مدل های مختلف CE معرفی شده، سپس با بهره گیری از تحلیل حساسیت، مفهوم مخروط های پایداری توسعه یافته و در یک مثال کاربردی مورد بررسی قرار گرفته است.

یافته ها: نتایج تحقیق نشان می دهد که ارزیابی پایداری CE با قیمت های قطعی می تواند ابزاری کارآمد در تصمیم گیری های اقتصادی، پیش بینی وضعیت بازار و تدوین سیاست های راهبردی باشد و به تحلیل گران کمک کند تا ریسک های ناشی از نوسانات بازار را بهتر مدیریت نمایند.

اصالت: این پژوهش در رویکرد نوآورانه آن به تحلیل پایداری CE با استفاده از قیمت های قطعی نهفته است، بدون آن که به مدل های مرسوم مبتنی بر قیمت های ناقصی که گاه با چالش ها و محدودیت هایی همراه هستند، متکی باشد. با بهره گیری از تحلیل حساسیت و معرفی مفهوم مخروط های پایداری، این تحقیق چارچوبی مفهومی و عملیاتی برای ارزیابی ریسک، پیش بینی ورشکستگی و بهبود موقعیت اقتصادی واحدها فراهم می آورد. چنین رویکردی می تواند جایگزینی موثر و قابل اتکا برای تحلیل های مبتنی بر داده های غیرقطعی باشد و افق های تازه ای در تحلیل های اقتصادی و تصمیم گیری های استراتژیک بگشاید.

کلیدواژه ها: پایداری، CE، ورشکستگی.

۱- مقدمه

این مقاله روی ارزیابی CE و قابلیت پایداری آن متمرکز شده است. مفهوم CE به فارل [1] نسبت داده شده که در آن به اطلاعات دقیقی از قیمت نیازمندیم، ولی در واقع اطلاعات قیمت به طور مداوم تغییر می کند، در نتیجه قیمت های ثابت در تحلیل های کوتاه مدت قابل استفاده اند که CE در این دوره های کوتاه مدت توسط فارل [1] و فار و همکاران [2] به دست آمده است. اما برای دستیابی به ارزیابی بلندمدت می توان از CE با قیمت های ناقصی که در مقالات کامانهر و دایسون [3] و کوسمانن و پست [4] توصیف شده، سود برد. ولی برخی اوقات روش های آن ها مشکلاتی در بردارد که باعث شده ما در این مقاله بدون استفاده از قیمت های ناقصی به بحث تحلیل حساسیت رو آورديم و با استفاده از نتایج آن، شاخص هایی را برای پیش بینی خطر ورشکستگی یا بهبود موقعیت معرفی نماییم که ساختار این مقاله به صورت ذیل می باشد:

¹ Cost Efficiency (CE)

² Data Envelopment Analysis (DEA)

غیر مرزی هم مطابق با مجموعه های مرزی به مجموعه های NE ، NE' و NF افزای می گردند. در این مثال واحدها به صورت $\{A, B, C, D\} \subseteq E$ ، $\{H\} \subseteq NF$ ، $\{E, F\} \subseteq NE$ ، $\{G\} \subseteq F$ دسته بندی می شوند.

اندازه گیری کارایی تکنیکی توسط فارل [1] تعریف شد و توسط چارنز و همکاران [8] مورد بهره برداری قرار گرفت. مدل استاندارد DEA ، در ماهیت ورودی توسط چارنز و همکاران [8] به صورت ذیل فرمول بندی شد.

مدل استاندارد DEA در ماهیت ورودی عبارت است از:

$$\begin{aligned} \text{Max } \theta &= \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} . \\ \text{s.t } \sum_{i=1}^m v_i x_{io} &= 1. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1-1)$$

$$u_r \geq \varepsilon, \quad r = 1, \dots, s. \quad (1-2)$$

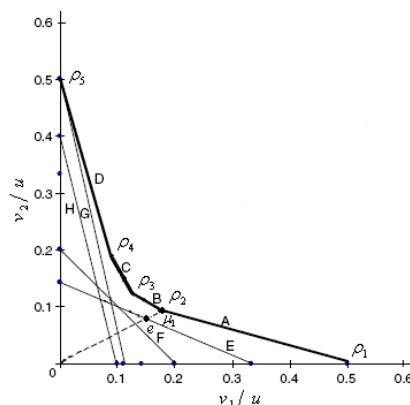
$$v_i \geq \varepsilon, \quad i = 1, \dots, m, \quad (1-3)$$

که در آن u_r و v_i وزن های مربوط به خروجی ها و ورودی ها می باشند و در جواب بهینه قیمت ورودی ها و خروجی های واحد تحت ارزیابی را در بهترین شرایط نشان می دهند.

برای توضیح تاثیر وزن ها در ارزیابی کارایی، مرز کارایی و مجموعه امکان تولید در فضای وزن ها در شکل ۲ نشان داده شده است.

قیود برنامه ریزی خطی (مدل (۱-۱) تا مدل (۱-۳)) بین همه واحدها مشترک است، پس متناظر با قیود ذیل همه متغیرها مثبت فرض شده اند.

$$\begin{aligned} u &\leq 2 v_1 + 7 v_2 \quad (A), & u &\leq 3 v_1 + 7 v_2 \quad (E), \\ u &\leq 3 v_1 + 5 v_2 \quad (B), & u &\leq 5 v_1 + 5 v_2 \quad (F), \\ u &\leq 5 v_1 + 3 v_2 \quad (C), & u &\leq 9 v_1 + 2 v_2 \quad (G), \\ u &\leq 7 v_1 + 2 v_2 \quad (D), & u &\leq 10 v_1 + 2.5 v_2 \quad (H). \end{aligned} \quad (2)$$



شکل ۲- اندازه گیری کارایی در فضای وزن ها.

Figure 2- Measuring efficiency in weight space.

با تقسیم نامساوی های (۲) بر $u > 0$ نامساوی های معادلی حاصل می شود که در شکل ۳ با دستگاه مختصات v_1/u و v_2/u نشان داده شده است. هر محدودیت هم با یک خط به نمایش درآمده که وابسته به یک واحد می باشد. دوباره برای توصیف کامل تر، واحد ناکارای E را در نظر می گیریم. قیدهای مدل (۱) مربوط به واحد E شامل نامساوی های (۲) به همراه معادله $3v_1 + 7v_2 = 1$ می باشد. با حل هندسی مدل، جواب بهینه واحد E در ρ_2 رخ می دهد که مقطع خطوط A و B است و این معادل هندسی مجموعه مرجع DMU_E می باشد و مقدار کارایی تکنیکی هم با نسبت $\frac{oe}{o\rho_2}$ به دست می آید.

۲-۲-۲ CE-فازل

فازل [1] علاوه بر کارایی تکنیکی، CE با قیمت های ثابت را نیز معرفی کرد، اگرچه ممکن بود قیمت ها بین واحدها متمایز باشند. ابتدا اندازه CE فازل را به طور هندسی برای واحد E توصیف می کنیم. برای ارزیابی CE خط هم هزینه $1x_1 + 4x_2$ در دست است، این خط با $p_\alpha p'_\alpha$ در شکل ۲ نشان داده شده است. نقطه ای که در آن خط هم هزینه بر مرز تولید مماس شده یعنی نقطه C ، کم ترین هزینه را صرف تولید خروجی مورد نظر می کند. پس اندازه CE با نسبت $\frac{oe'}{oe}$ به دست می آید. اما روش هندسی همواره جواب گو نیست، به منظور حل این مشکل برای اولین بار فار و همکاران [2] مدل ذیل را مطرح کردند.

مدل مینیمم هزینه

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{i=1}^m p_{io} x_i^o \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_i^o, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro}, \quad r = 1, \dots, s, \\ & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \\ & x_i^o \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (3)$$

که p_{io} قیمت ورودی i th برای واحد o th می باشد. اگر فرض کنیم جواب بهینه مدل (۳) با (x^o, λ^o) نمایش داده شود، پس CE_o ، DMU_o به صورت ذیل به دست می آید:

$$CE_o = \frac{\sum_{i=1}^m p_{io} x_i^{o*}}{\sum_{i=1}^m p_{io} x_{io}} \quad (4)$$

در ضمن با نرمال سازی بردار قیمت، مدل (۳) مستقیماً مقدار CE را به ما خواهد داد. اما روش دیگری نیز برای محاسبه CE وجود دارد.

مدل CE با کنترل وزن

در این جا به بیان مدلی برای ارزیابی CE با اعمال محدودیت های وزنی می پردازیم که توسط شافنیت و همکاران [9] مطرح شده است.

قضیه ۱ - اندازه کارایی (K) که از مدل (۵) به دست آمده با اندازه CE به دست آمده از معادله (۴) برابر است.

اثبات: به [9] مراجعه نمایید.

حال این قسمت را با تفسیر هندسی CE در فضای وزن ها به پایان می بریم. با قیمت های معلوم واحد E محدودیت (۵-۱) به صورت $\frac{v_1}{v_2} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{3}{4}$ است که در شکل ۳ با om_1 نمایش داده شده است، در نتیجه CE_E برابر با $\frac{oe'}{om_1}$ می باشد.

همان طور که مشاهده کردیم اندازه تنها CE درگیر مقادیر نسبی قیمت ها می باشد و افزایش (کاهش) متناسب قیمت ها، خط هم هزینه در فضای ورودی ها و اشعه هزینه در فضای وزن ها را بدون تغییر نگه می دارد و در نتیجه اندازه CE بدون تغییر خواهد ماند.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & K = \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} \\ \text{s.t} \quad & \sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1, \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (5)$$

$$v_{i^a} - \frac{p_{i^a o}}{p_{i^b o}} v_{i^b} = 0, \quad i^a < i^b, \quad i^a, i^b = 1, \dots, m, \quad (5-1)$$

$$u_r \geq \varepsilon, \quad r = 1, \dots, s.$$

۳-۲- تجزیه فارل

در این جا، ابتدا کارایی تخصیصی را معرفی می کنیم. این نوع کارایی برای صفحه تولید مرجع کارایی تکنیکی به کار برده می شود که به صورت ذیل فرمول بندی می گردد:

$$AE_o = \frac{CE_o}{TE_o}. \quad (6)$$

البته اندازه AE_o را می توان به طور مستقیم نیز از ابر صفحه هم هزینه مینیمم به دست آورد [4] و در نتیجه تجزیه اساسی فارل را با توجه به معادله (۶) به صورت ضرب کارایی تخصیصی در تکنیکی که همواره برابر CE است، به دست می آید. ضمناً مقدار CE_o مستقل از مرز PPS است، به همین دلیل کارایی تخصیصی را می توان به عنوان اندازه ای برای CE که وابسته به مرز کارایی است در نظر گرفت.

نتیجه: کارایی تکنیکی یک شرط لازم و نه کافی برای CE است.

اثبات: به [4] مراجعه شود.

۳. تغییرات کارایی هزینه

۳-۱- تحلیل حساسیت مدل های CE

مدل هایی که برای CE در بخش پیش مطرح گردید نیازمند اطلاعات کامل قیمت می باشند، ولی در اکثر کاربردهای واقعی دسترسی به قیمت های دقیق میسر نمی باشد. ضمناً قیمت های قطعی ارزیابی های کوتاه مدت را حاصل می کند، بر فرض مثال سکه، نفت و ارز روزانه در بازارهای جهانی تغییر می کند و محاسبه CE واحدها باید روزانه انجام گیرد. برای رفع این مشکل به کران قیمت ها رو آورده شد که ارزیابی های بلندمدت تری را حاصل می ساخت، مثلاً در سال اخیر قیمت سکه در بازه ۱۰۰/۰۰۰، ۹۰/۰۰۰ تومان قرار داشت.

در این جا با رویکرد تحلیل حساسیت، بردار قیمت را آشفته ساخته و تغییرات CE را بررسی خواهیم نمود. سپس به بحث پایداری در جواب که شامل حفظ یا بهبود وضعیت است، خواهیم پرداخت.

با توجه به این که در مدل (۳) ورودی ها مشاهدات نامنفی فرض شده و به ازای هر j ، $\lambda_j \geq 0$ ، در نتیجه رابطه (۱-۳) زاید می باشد، پس می توان متغیر x^0 را متغیر آزاد فرض کرد. حال با اعمال این متغیر آزاد، دوآل مدل (۳) دارای قید تساوی $V = P_0$ خواهد بود و نهایتاً با جایگذاری این قید، به مدل ذیل که در واقع دوآل مدل (۳) می باشد، دست می یابیم:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{r0} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m p_{i0} x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & u_r \geq 0, \quad r = 1, \dots, s. \end{aligned} \quad (v)$$

ضمناً می دانیم که فرم مضربی مدل CCR جهت ارزیابی DMU_0 ، بردار نرمال ابرصفحه های تکیه کننده بر PPS در مختصات DMU_0 را حاصل می نماید.

۳-۲- پایداری CE در اثر لرزش های بازار

اقتصاددانان همواره درصدد بهبود وضعیت مالی و مینیمم نمودن هزینه ها می باشند. پس برای رسیدن به این هدف نظرمات را چنین مطرح می کنیم که اگر واحدهایی با قیمت موجود کارای هزینه شوند، چگونه می توان کارایی شان را در برابر لرزش های بازار حفظ کرد یا اگر ناکارای هزینه بودند وضعیت شان را بهبود داد.

برای ورود به بحث پایداری در فضای وزن ها متمرکز خواهیم شد، پس مجموعه های ذیل را برای DMU_0 که کارای راسی است، تعریف می کنیم:

$$\{ \hat{H}_0 = X \mid V^* X = 0 \text{ و } (U^*, V^*) \text{ جواب بهینه (۸) باشد} \}. \quad (8)$$

تصویر H_0 در فضای V به صورت ذیل می باشد:

$$\{ H_0 = (X, Y) \mid U^* Y - V^* X = 0 \text{ و } (U^*, V^*) \text{ جواب بهینه (۸) باشد} \}. \quad (9)$$

تعریف ۱- مخروط ایده آل DMU_0 : مخروط A_0 را برای DMU_0 ایده آل نامند، هرگاه کوچک ترین مخروط شامل $\hat{H}_0$ باشد.

قضیه ۲- DMU_0 کارای هزینه است، هرگاه ابرصفحه $L = \{ X \mid P^T X = 0 \}$ در مخروط A_0 قرار داشته باشد.

اثبات: بنا بر فرض، بدیهی است که می توان P را به صورت $P = \sum_{k=1}^l \alpha_k V_k^*$ در نظر گرفت که در آن (V_k^*, U_k^*) جواب بهینه مدل (۱) و α_k نا منفی می باشند. ضمناً $\bar{U}$ را جواب بهینه مدل (۷) با $P_0 = P$ در نظر می گیریم، پس $CE_0 = \frac{\bar{U}^T Y_0}{P^T X_0}$. بنا بر ساختار مدل (۷)

$(\frac{P}{\sum_{k=1}^l \alpha_k}, \frac{\bar{U}}{\sum_{k=1}^l \alpha_k})$ جواب شدنی مدل (۱) است. حال به خلف ادعا می کنیم $CE_0 < 1$ پس $\bar{U}^T Y_0 \leq P^T X_0$ از طرفی اگر (V^*, U^*)

جواب بهینه مدل (۷) باشد داریم $Y_0 \geq U^{*T} Y_0$ و چون DMU_0 کارای راسی فرض شده است، داریم $(\frac{\bar{U}}{\sum_{k=1}^l \alpha_k})^T Y_0 \geq 1$. لذا فرض

خلف باطل، زیرا $(\frac{P}{\sum_{k=1}^l \alpha_k})^T X_0 = 1$ و $(\frac{\bar{U}}{\sum_{k=1}^l \alpha_k})^T Y_0 < 1$ ، پس حکم ثابت شد.

لازم به ذکر است که به سهولت می توان در مرز فارل، این مخروط را با رسم خطوط متصل کننده واحد مورد نظر به واحدهای مجاور و در نظر گرفتن ناحیه ما بین آن ها به دست آورد. ضمناً در مورد مسایل با ابعاد بالاتر، استفاده از نرم افزارهای ریاضی جهت حصول جواب های بهینه مدل (۱) و مشخص نمودن مخروط A_o می تواند سودبخش باشد.

تعریف ۲- مخروط بهبوددهنده حقیقی: مخروط B_o را برای DMU_o بهبوددهنده حقیقی نامند، هرگاه کوچک ترین مخروط شامل $\hat{H}_o \cup \{X | P_o^t X = 0\}$ باشد.

وجه تسمیه **تعریف ۲** در آن است که اگر CE_o ، DMU_o یک نگردد، لااقل به سوی بهبود وضعیت حرکت کند. در واقع مخروط B_o محدوده حرکت از بردار هزینه فعلی به سوی بردار هزینه ای است که CE_o ، DMU_o را یک نماید.

قضیه ۳- اگر ابرصفحه $L = \{X | P_o^t X = 0\}$ پس از آشفته گی در B_o قرار گیرد، CE_o ، DMU_o بهبود می یابد.

اثبات: فرض کنیم که بردار هزینه فعلی را با P_{old}^o و بردار هزینه پس از آشفته گی را با P_{new}^o نشان دهیم. چون ابرصفحه $L_{new} = \{X | P_{new}^o X = 0\}$ در B_o فرض شده است، می توان P_{new}^o را به صورت $P_{new}^o = \sum_{k=1}^{l-1} \alpha_k V^{(k)} + \alpha_l P_{old}^o$ در نظر گرفت که $(V^{(k)}, U^{(k)})$ جواب بهینه مدل (۱) و ضرایب نامنفی فرض شده اند. برای اثبات کافی است نشان دهیم $CE_{new} \geq CE_{old}$. فرض کنیم جواب بهینه مدل (۷) به ازای P_{new}^o و P_{old}^o به ترتیب برابر با $\tilde{U}_{new}^t$ و $\tilde{U}_{old}^t$ باشد، پس کافی است ثابت شود $\frac{\tilde{U}_{new}^t Y_o}{P_{new}^o X_o} \geq \frac{\tilde{U}_{old}^t Y_o}{P_{old}^o X_o}$. بنا به قیود رابطه (۷) داریم:

$$\sum_{r=1}^s \tilde{u}_{r, old} y_{rj} - \sum_{i=1}^m p_{i, old}^o x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (10)$$

$$\sum_{r=1}^s u_r^{(k)} y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i^{(k)} x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, l-1. \quad (11)$$

در معادله های (۱۰) و (۱۱) داریم:

$$\sum_{r=1}^s \left(\sum_{k=1}^{l-1} \alpha_k u_r^{(k)} + \alpha_l \tilde{u}_{r, old} \right) y_{rj} - \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^{l-1} \alpha_k v_i^{(k)} + \alpha_l p_{i, old}^o \right) x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

پس $(\sum_{k=1}^{l-1} \alpha_k U^{(k)} + \alpha_k \tilde{U}_{old}^t)$ جواب شدنی مساله (۷) با P_{new}^o است، در نتیجه:

$$\tilde{U}_{new}^t Y_o \geq \left(\sum_{k=1}^K \alpha_k U^{(k)} + \alpha_k \tilde{U}_{old}^t \right)^t Y_o.$$

با تقسیم طرفین عبارت فوق بر $P_{new}^o X_o$ و با توجه به این که به ازای هر k ، $(k = 1, \dots, l-1)$ داریم $U^{(k) t} Y_o = V^{(k) t} X_o = 1$. پس:

$$\frac{\tilde{U}_{new}^t Y_o}{P_{new}^o X_o} \geq \frac{(\sum_{k=1}^{l-1} \alpha_k) / \alpha_l + \tilde{U}_{old}^t Y_o}{(\sum_{k=1}^{l-1} \alpha_k) / \alpha_l + P_{old}^o X_o} = \frac{\tilde{U}_{old}^t Y_o + K}{P_{old}^o X_o + K}, \quad (12)$$

که در آن $K = \frac{(\sum_{k=1}^{l-1} \alpha_k)}{\alpha_l}$ می باشد. از طرفی:

$$\frac{\tilde{U}_{new}^t Y_o}{P_{new}^o X_o} \leq 1 \Rightarrow \tilde{U}_{new}^t Y_o \leq P_{new}^o X_o. \quad (13)$$

از معادله های (۱۲) و (۱۳) داریم که $(\tilde{U}_{new}^t Y_o) (P_{new}^o X_o) \geq (\tilde{U}_{old}^t Y_o) (P_{old}^o X_o)$ در واقع همان $CE_{new} \geq CE_{old}$ است؛ بنابراین، حکم ثابت شد.

قضیه ۴- مخروط A_o شامل همه ابرصفحه های هزینه ای است که DMU_o را کارای هزینه می کند.

اثبات: به خلف فرض کنید جواب بردار هزینه مانند $\bar{P}$ در $\bar{L} = \{X | \bar{P}_0' X = 0\}$ قرار ندارد، ولی به ازای آن DMU_0 کارای هزینه می باشد. حال فرض نمایید $(\bar{U}')$ جواب بهینه مدل (۷) با هزینه $\bar{P}$ باشد. به طور معادل، فرض خلف $\bar{U}' Y_0 = \bar{P}' X_0$ است. بنا به خاصیت تبدیل پذیری مدل (۷)، $(\frac{\bar{P}}{1.\bar{P}}, \frac{\bar{U}'}{1.\bar{P}})$ جواب بهینه مدل (۷) است، همچنین با توجه به قید نرمال ساز جواب بهینه مدل (۱) نیز می باشد. پس $\bar{L}$ متعلق به A_0 بوده که خلاف فرض اولیه است.

نتیجه: مخروط B_0 شامل ابرصفحه های هزینه ای است که CE ، DMU_0 را بهبود می دهند.

تعریف ها و قضیه های فوق کاملاً تئوری می باشند و اگر فرض کنیم واحد p کارای هزینه باشد، تحولات بازار اغلب به گونه ای است که این واحد همچنان کارای هزینه و حاکم بر بازار باقی بماند، پس واحدهای دیگر نباید سبب ناکارایی آن گردند، به همین منظور تعاریف ذیل را ارائه می کنیم:

تعریف ۳- مخروط بهبوددهنده کاربردی: مخروط C_0 را برای DMU_0 بهبوددهنده کاربردی نامند هرگاه $C_0 = B_0 \cap A_p$. بدیهی است در مخروط C_0 ، CE ، DMU_0 ، بدون برهم زدن کارایی DMU_p ، بهبود می یابد.

تذکر ۱: در صورت وجود بیش از یک واحد کارای هزینه با هزینه فعلی در تعریف فوق به جای A_p ، اشتراک مخروط های ایده آل تمام واحدهای کارای هزینه قرار می گیرد. یعنی اگر DMU_{p_1} ، DMU_{p_2} ، DMU_{p_3} ، DMU_{p_4} ، DMU_{p_5} ، DMU_{p_6} ، DMU_{p_7} ، DMU_{p_8} ، DMU_{p_9} ، $DMU_{p_{10}}$ تمام واحدهای کارای هزینه با هزینه فعلی باشد، آن گاه خواهیم داشت $C_0 = B_0 \cap (\cap_{k=1}^K A_{p_k})$.

تذکر ۲: قضیه های مطرح شده برای B_0 برای C_0 نیز صادق است.

تعریف ۴- مخروط بهبوددهنده کاربردی واحدهای کارای غیر راسی، ضعیف و ناکارا: مخروط D_0 را برای DMU_0 که یکی از انواع مطرح شده است بهبوددهنده کاربردی نامند، هرگاه اشتراک مخروط های بهبوددهنده کاربردی واحدهای مرجع آن باشد.

۳-۳- تقابل و تفاهم واحدهای تصمیم گیرنده

واضح است که هر واحد مایل به بهبود CE خود می باشد، در نتیجه سعی در همسان سازی بازار با مخروط بهبوددهنده خود دارد. اما این تلاش دارای تبعات متفاوتی است، مثلاً اگر بازار با DMU_0 همسان شود ممکن است باعث کاهش CE دسته ای از واحدها و افزایش CE دسته ای دیگر گردد. بنا به این توضیح متوجه می شویم، واحدهایی که در یکی از این دسته ها قرار دارند می توانند در یک تبانی اقتصادی باعث ورشکستگی واحدهای خارج از دسته گردند، که این امر باعث چالش هایی در بازارهای جهانی می شود.

حال قضیه ای مطرح می گردد که بنا بر اثبات قضیه ۳ به سهولت ثابت می شود.

قضیه ۵- اگر اشتراک مخروط های بهبوددهنده کاربردی DMU_h و DMU_k تنها برابر ابرصفحه هزینه فعلی باشد، آن دو واحد در تقابل با یکدیگرند، به این مفهوم که با بهبود کارایی یکی از آن دو، CE دیگری تخریب می گردد.

تعریف ۴- اگر اشتراک مخروط های بهبوددهنده کاربردی دو واحد تنها برابر ابرصفحه هزینه فعلی نباشد، آن دو واحد با هم سازگارند.

در این قسمت به نوعی درگیر میزان مقاومت واحدها در مقابل لرزش های بازار بودیم که مطمئناً اعمال آن در مسایل عملی افق های جدیدی را روبه روی تصمیم گیران اقتصادی قرار می دهد. اما چون مقایسه این مخروط ها نیازمند روش های هندسی پیشرفته ای است که از بیان نمودن آن در این مقاله خودداری می نمایم.

۴-۳- شاخص ها

حال انعطاف پذیری DMU_o مدنظر است، یعنی در واقع می خواهیم بدانیم که چند درصد از جامعه با DMU_o هم فکر هستند. برای به دست آوردن نسبت هم فکری با DMU_o شاخص تبانی را به صورت زیر معرفی می کنیم:

$$(14) \quad \text{شاخص تبانی (تفاهم)} : \frac{\text{تعداد واحدهای سازگار با } DMU_o}{\text{تعداد کل واحدها}}$$

و برای حصول حداکثر توان بازار برای ورشکست نمودن DMU_o ، شاخص ورشکستگی را به صورت ذیل معرفی می کنیم:

$$(15) \quad \text{شاخص ورشکستگی} : \frac{\text{تعداد واحدهای متقابل با } DMU_o}{\text{تعداد کل واحدها}}$$

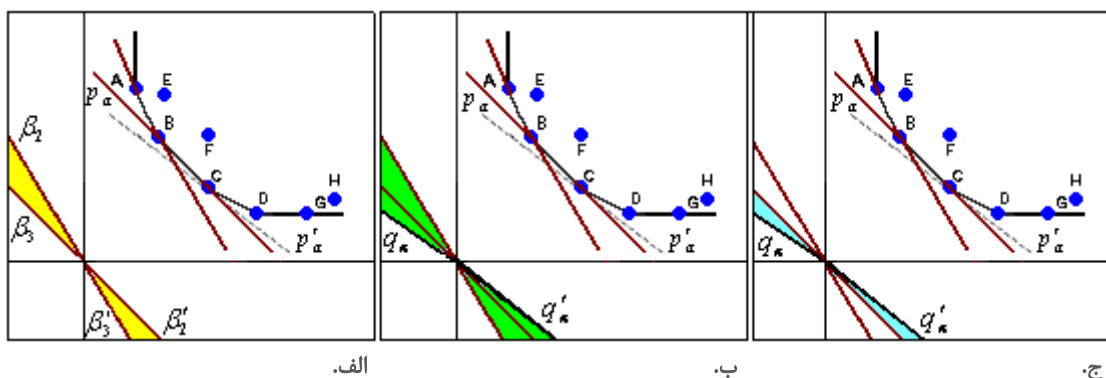
بدیهی است که برای واحد کارای هزینه، شاخص تبانی برابر یک و شاخص ورشکستگی برابر صفر می باشد که با واقعیت مطابق است، در ضمن هرچه شاخص تبانی به یک نزدیک تر باشد DMU_o در اکثر موارد می تواند با مشارکت واحدهای دیگر در مقابل لرزش های بازار مقاومت بیشتری نماید و هرچه شاخص ورشکستگی کم تر باشد، توان بازار برای متزلزل ساختن DMU_o کم تر است.

۴. مثال

حال مفاهیم جدید بیان شده در این مقاله را روی مثال بخش ۲ توصیف می کنیم. واحد E را در نظر می گیریم، پس $(p_1, p_2) = (3, 4)$ خواهد بود. همان طور که از شکل ۱ مشاهده کردیم، واحد C توسط ابرصفحه هزینه $3x_1 + 4x_2$ کارای هزینه می شود. حال می خواهیم این کارایی را در C تضمین نماییم، پس باید توانایی این واحد را در مقابل آشفته گی های قیمت محاسبه کنیم. ابتدا برای مشخص کردن مخروط A_C ، ابرصفحه های تکیه کننده سازای PPS را رسم می کنیم و پس از انتقال آن ها به مبدا، مخروط A_C توسط مخروط به وجود آمده با خطوط $\beta_3\beta'_3$ و $\beta_4\beta'_4$ تعریف می گردد. ضمناً بدیهی است که ابرصفحه هزینه تنها به A_C تعلق دارد، زیرا این واحد تنها واحد کارای هزینه با قیمت های فعلی است و بنا به همین دلیل B_C و C_C با مخروط A_C برابر می باشند.

حال برای درک بهتر موضوع، به توصیف انواع مخروط های واحدهای دیگر می پردازیم. ابتدا واحد کارای B را در نظر می گیریم. بنا به شکل ۳، ابرصفحه سازی مار بر واحدهای A و B و ابرصفحه سازی مار بر واحدهای B و C بر واحد B تکیه کرده اند که با انتقال این دو ابرصفحه به مبدا به ترتیب ابرصفحه های $\beta_2\beta'_2$ و $\beta_3\beta'_3$ حاصل می شود؛ بنابراین، مخروط ایده آل A_B توسط این ابرصفحه ها به دست می آید.

حال برای مشخص نمودن مخروط B_B ، باید کوچک ترین مخروط شامل $\beta_2\beta'_2$ و $\beta_3\beta'_3$ را در نظر بگیریم، که بنا بر شکل ۳ مخروط بین $q_\alpha q'_\alpha$ می باشد. مخروط C_B نیز با اشتراک مخروط A_C و B_B به سهولت به دست می آید. ضمناً مخروط های واحدهای کارای دیگر مشابه با مخروط های این واحد حاصل می شوند.



شکل ۳- مخروط های پایداری واحد B؛ الف. مخروط ایده آل، ب. مخروط بهبوددهنده حقیقی، ج. مخروط بهبوددهنده کاربردی.
Figure 3- Stability cones of unit B; a. Ideal cone, b. Real improving cone, c. Practical improving cone.

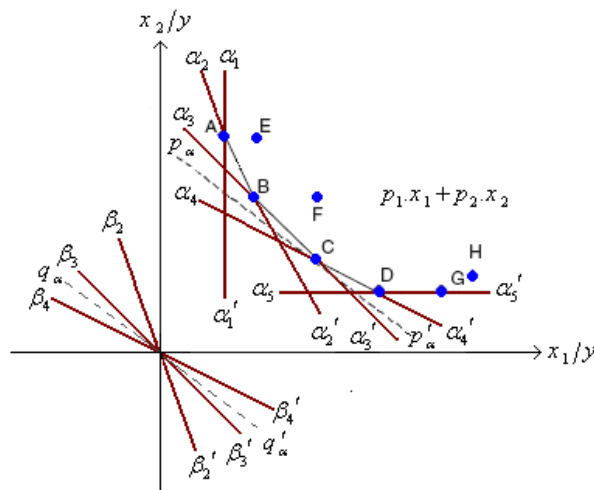
حال واحد ناکارای F را با قیمت واحد E در نظر می‌گیریم. بنا به شکل ۱ واحدهای B و C واحدهای مرجع F می‌باشند، پس خواهیم داشت:

$$D_F = C_B \cap C_C = C_B \cap A_C = C_B.$$

لازم به ذکر است که می‌توانیم مخروط‌های واحدهای ناکارای دیگر را مشابه روش فوق به‌دست آوریم. البته برای کسب اطلاعات کامل‌تر می‌توان به جدول ۲ و شکل ۴ مراجعه نمود.

جدول ۲- A_0, B_0, C_0, D_0 برای هر واحد.
Table 2- A_0, B_0, C_0, D_0 for each unit.

O	A ₀	B ₀	C ₀	D ₀
A	مخروط بين $\beta_2\beta'_2$ و x_2/y	مخروط بين $q_\alpha q'_\alpha$ و x_2/y	مخروط بين $q_\alpha q'_\alpha$ و $\beta_3\beta'_3$	-
B	مخروط بين $\beta_2\beta'_2$ و $\beta_3\beta'_3$	مخروط بين $q_\alpha q'_\alpha$ و $\beta_2\beta'_2$	مخروط بين $q_\alpha q'_\alpha$ و $\beta_3\beta'_3$	-
C	مخروط بين $\beta_3\beta'_3$ و $\beta_4\beta'_4$	مخروط بين $\beta_3\beta'_3$ و $\beta_4\beta'_4$	مخروط بين $\beta_3\beta'_3$ و $\beta_4\beta'_4$	-
D	مخروط بين $\beta_4\beta'_4$ و x_1/y	مخروط بين $q_\alpha q'_\alpha$ و x_1/y	مخروط بين $q_\alpha q'_\alpha$ و $\beta_4\beta'_4$	-
E	-	-	-	مخروط بين $q_\alpha q'_\alpha$ و $\beta_3\beta'_3$
F	-	-	-	مخروط بين $q_\alpha q'_\alpha$ و $\beta_3\beta'_3$
G	-	-	-	مخروط بين $q_\alpha q'_\alpha$ و $\beta_4\beta'_4$
H	-	-	-	مخروط بين $q_\alpha q'_\alpha$ و $\beta_4\beta'_4$



شکل ۴- توصیف هندسی مخروط‌های ایده‌آل و بهبوددهنده.

Figure 4- Geometric description of ideal and improving cones.

حال پس از توصیف انواع مخروط‌ها به بررسی دسته واحدهای سازگار، دسته واحدهای متقابل و شاخص‌های مربوطه می‌پردازیم. بنا به جدول ۳، واحدها به دو دسته افزاز شده‌اند که این دسته‌بندی از قرار گرفتن در طرفین واحد کارای هزینه، یعنی واحد C بوجود آمده است. مثلاً در مورد واحد D اشتراک مخروط‌های بهبوددهنده کاربردی واحدهای A, B, E و F با تهی C_D می‌باشد، پس این واحدها با DMU_D ناسازگار و متقابلند. در نتیجه شاخص ورشکستگی این واحد که با تعداد واحدهای ناسازگار بر تعداد کل واحدها تعریف شده، برابر با $\frac{4}{8}$ می‌باشد.

حال با شناخت واحدهای ناسازگار، به راحتی می‌توان مجموعه واحدهای سازگار و شاخص تنان، را به صورت ذیل به دست آورد.

مجموعه واحدهای سازگار با واحد: $\{A, B, C, D, E, F, G, H\} - \{A, B, E, F\} = \{C, D, G, H\}$.

شخص تباہی : $1 - \frac{4}{8} = \frac{4}{8}$.

بدیهی است که در مورد بقیه واحدها نیز می توان به صورت مشابه عمل نمود. البته برای مشاهده اطلاعات کامل تر می توان به جدول ۳ مراجعه نمود.

لازم به ذکر است که می توان این مجموعه ها و شاخص های مربوطه را در مرز فارل به سهولت با شناخت واحدهای کارای هزینه و دسته بندی کردن واحدها در طرفین آن ها به دست آورد و همواره لزومی بر تشکیل جدولی مشابه با جدول ۳ نمی باشد.

جدول ۳- واحدهای متقابل و سازگار و شاخص های تبانی و ورشکستگی.

Table 3 - Mutual and compatible units and collusion and bankruptcy indicators.

شاخص ورشکستگی	شاخص تبانی	واحدهای متقابل	واحدهای سازگار	o
$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	H, G, D	F, E, C, B, A	A
$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	H, G, D	F, E, C, B, A	B
0	1	-	H, G, F, E, D, C, B, A	C
$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{8}$	F, E, B, A	H, G, D, C	D
$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	H, G, D	F, E, C, B, A	E
$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	H, G, D	F, E, C, B, A	F
$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{8}$	F, E, B, A	H, G, D, C	G
$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{8}$	F, E, B, A	H, G, D, C	H

البته لازم به ذکر است که برای به دست آوردن مخروط های مطرح شده در فضای وزن ها نیز می توان کار کرد. مثلاً در شکل ۲ پاره خط $p_3 p_4$ شامل بردار گرادیان نرمال شده تمام ابرصفحه های درون A_c می باشد، که این تناظر برای تمامی واحدها قابل بیان است.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله CE با قیمت های قطعی و انواع مدل های آن، مطرح گردید، سپس به معرفی انواع مخروط ها پرداختیم و نتایج پایداری را بررسی نمودیم، که این موارد می تواند راهگشای بسیاری از مسایل اقتصادی باشد و در پیش بینی وضعیت بازارهای جهانی کمکی شایسته به تصمیم گیران اقتصادی نماید و سیاست های اقتصادی آن ها را جهت دهی می کند. ضمناً مفسران اقتصادی با استفاده از نتایج این تئوری می توانند واحدهای اقتصادی را از خطراتی که در تغییرات بازار متوجه آن ها است، مطلع ساخته و به عقد قراردادهای اقتصادی آنان به منظور پیشرفت و ورود به بازارهای جهانی کمک نماید.

منابع

- [1] Farrell, M. J. (1957). The measurement of productive efficiency. *Journal of the royal statistical society. series a (general)*, 120(3), 253. <https://doi.org/10.2307/2343100>
- [2] Fare, R., Grosskopf, S., & Lovell, C. A. K. (1985). *The measurement of efficiency of production*. Springer Netherlands. <https://books.google.com/books?id=OaWffSMcV14C>
- [3] Camanho, A. S., & Dyson, R. G. (2005). Cost efficiency measurement with price uncertainty: A DEA application to bank branch assessments. *European journal of operational research*, 161(2), 432–446. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2003.07.018>
- [4] Kuosmanen, T., & Post, T. (2001). Measuring economic efficiency with incomplete price information: With an application to European commercial banks. *European journal of operational research*, 134(1), 43–58. [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(00\)00237-X](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(00)00237-X)
- [5] Debreu, G. (1951). The coefficient of resource utilization. *Econometrica*, 19(3), 273–292. <https://doi.org/10.2307/1906814>
- [6] Koopmans, T. C. (1951). *Activity analysis of production and allocation*. John Wiley Sons. <http://krishikosh.egranth.ac.in/handle/1/5810130049>

- [7] Charnes, A., Cooper, W. W., & Thrall, R. M. (1991). A structure for classifying and characterizing efficiency and inefficiency in data envelopment analysis. *Journal of productivity analysis*, 2(3), 197–237. <https://doi.org/10.1007/BF00159732>
- [8] Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European journal of operational research*, 2(6), 429–444. [https://doi.org/10.1016/0377-2217\(78\)90138-8](https://doi.org/10.1016/0377-2217(78)90138-8)
- [9] Schaffnit, C., Rosen, D., & Paradi, J. C. (1997). Best practice analysis of bank branches: An application of DEA in a large Canadian bank. *European journal of operational research*, 98(2), 269–289. [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(96\)00347-5](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(96)00347-5)