



Paper Type: Original Article



Convergence Assessment of Dynamical Systems and Queuing Theory in Uncertainty Space, for Controllable and Uncontrollable Structures with a Focus on Noncooperative Games

Amin Razani^{1,*}, Abolfazl Mirzazadeh¹ ¹ Department of Industrial Engineering, Kharazmi University, Tehran, Iran; enjoy.math@yahoo.com; mirzazadeh@khu.ac.ir.**Citation:**

Razani, A., & Mirzazadeh, A. (2025). Convergence assessment of dynamical systems and queuing theory in uncertainty space, for controllable and uncontrollable structures with a focus on noncooperative games. *Management: Modeling, analysis and application*, 2(1), 7-19.

Received: 20/03/2024

Reviewed: 25/06/2024

Revised: 05/09/2024

Accepted: 11/11/2024

Abstract

Purpose: This study investigates convergence assessment of dynamical systems and queuing theory in controllable and uncontrollable structures, focusing on noncooperative games.

Methodology: Uncertainty in systems that tend to converge defines a time-varying boundary to reduce the problem of increasing excessive control in the system. Therefore, independent and mutual parameters (Dynamical structure and system preferences) can be designed as system actors and performance indicators for each parameter as its cost function so that its optimal results can be relatively examined in a fuzzy structure.

Findings: The overall result showed that considering the controllability structure makes it possible to avoid the increase in waiting costs for convergence due to the multiplicity of convergence paths. The created cost function changes with the system's state, and the controllability structure does not require multiple iterations to obtain the optimal solution. In contrast, the absence of controllability structures in the system when examining the input and output paths leads to a multiplicity of equilibria for cooperation and non-cooperation of servers in creating convergence because, in this case, the servers selected for convergence only seek to increase their income from the system and act in proportion to the system's performance. The convergence time of the system increases significantly. Also, the examination of the income functions showed that during convergence (In controllable and uncontrollable structures), paying attention to dynamic structures is more important than considering the system's preferences in selecting converging servers.

Originality/Value: The distinction of this research lies in the innovative combination of the two fields of dynamic systems and queuing theory with the framework of noncooperative games and its examination of controllable and uncontrollable structures. While previous studies have mainly analyzed these concepts separately, this research, by combining them and focusing on the convergence behavior under strategic interactions, offers a new perspective on the dynamic analysis of complex systems. The adopted approach can be used to design and optimize real systems with noncooperative characteristics in queuing and dynamic environments.

Keywords: Dynamic systems, Queuing theory, Uncertainty, Controllable structure, Uncontrollable structure of noncooperative game.



Corresponding Author: enjoy.math@yahoo.com

<https://doi.org/10.22105/mmaa.v1i1.58>

Licensee. **Management: Modeling, Analysis and Applications**. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>).



۶

نوع مقاله: پژوهشی

ارزیابی همگرایی سیستم های دینامیکی و تئوری صف در فضای عدم قطعیت برای ساختارهای کنترل پذیر و غیرکنترل پذیر

امین رازانی^۱، ابوالفضل میرزا زاده^۱

^۱گروه مهندسی صنایع، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران.

چکیده

هدف: در این مطالعه، ارزیابی همگرایی سیستم های دینامیکی و تئوری صف در ساختارهای کنترل پذیر و غیرکنترل پذیر با تمرکز بر بازی های غیرهمکار مورد بررسی قرار گرفته است.

روش شناسی پژوهش: عدم قطعیت در سیستم هایی که تمایل به همگرایی دارند، مرزی متغیر با زمان تعریف می کند تا مشکل افزایش کنترل بیش از حد در سیستم را کاهش دهد. لذا می توان پارامترهای مستقل و متقابل (ساختار دینامیکی و ارجحیت های سیستم) را به عنوان بازیگران سیستم و شاخص های عملکردی برای هر پارامتر را به عنوان تابع هزینه آن طراحی نمود تا نتایج بهینه آن به صورت نسبی در یک ساختار فازی بررسی شود.

یافته ها: نتیجه کلی نشان داد با در نظر گرفتن ساختار کنترل پذیری می توان از افزایش هزینه های انتظار برای همگرایی به دلیل تعدد مسیرهای همگرایی اجتناب نمود. یعنی تابع هزینه ایجاد شده با وضعیت سیستم تغییر می کند و ساختار کنترل پذیری به تکرارهای متعدد برای به دست آوردن جواب بهینه نیاز ندارد. در مقابل نبود ساختارهای کنترل پذیری در سیستم در هنگام بررسی مسیرهای ورودی و خروجی به تعدد تعادل هایی برای همکاری و عدم همکاری سروورها در ایجاد همگرایی منجر می شود زیرا در این حالت سروورهای که برای همگرایی انتخاب شده اند، تنها به دنبال افزایش عایدی خود از سیستم هستند و متناسب با عملکرد سیستم عمل می کنند و زمان همگرایی سیستم به صورت قابل توجهی افزایش می یابد. همچنین بررسی توابع عایدی نشان داد در هنگام همگرایی (در ساختارهای کنترل پذیر و غیرکنترل پذیر) توجه به ساختارهای دینامیکی نسبت به در نظر گرفتن ارجحیت های سیستم در انتخاب سروورهای همگراکننده از اهمیت بالاتری برخوردار است.

اصالت / ارزش افزوده علمی: تمایز این پژوهش در ترکیب نوآورانه دو حوزه سیستم های دینامیکی و تئوری صف با چارچوب بازی های غیرهمکار و بررسی آن در ساختارهای کنترل پذیر و غیرکنترل پذیر نهفته است. در حالی که مطالعات پیشین عمدتاً به تحلیل جداگانه این مفاهیم پرداخته اند، این تحقیق با تلفیق آن ها و تمرکز بر رفتار همگرایی در شرایط تعاملات استراتژیک، چشم اندازی جدید در تحلیل پویای سیستم های پیچیده ارائه می دهد. رویکرد اتخاذ شده می تواند به عنوان مبنایی برای طراحی و بهینه سازی سیستم های واقعی با ویژگی های غیرهمکارانه در محیط های صفی و دینامیکی مورد استفاده قرار گیرد.

کلیدواژه ها: سیستم های دینامیکی، تئوری صف، عدم قطعیت، ساختار کنترل پذیر، ساختار غیرکنترل پذیر بازی غیرهمکار.

۱- مقدمه

مطالعه رفتار دینامیکی سیستم ها در طیف گسترده ای از کاربردها، نیازمند تحلیل و کمی سازی پیش بینی های مدل از نظر عدم قطعیت در توصیف و محیط های عملیاتی مدل است. در این میان سیستم هایی که می توانند با ساختارهای گسسته ولی در محیط های پویا مدل شوند، دارای عدم قطعیت بیش تری خواهند بود. مطالعات اولیه در این زمینه با عدم قطعیت تصادفی در سال ۱۹۶۵ آغاز شد. نتایج مطالعات اولیه سرآغازی برای تعریف

سیستم های دینامیکی در فرآیندهای تصادفی شد [1]. سیستم های دینامیکی تصادفی یک حوزه تحقیقاتی در تلاقی سیستم های دینامیکی و نظریه احتمال است و چارچوب ایده آلی را برای کاهش عدم قطعیت در سیستم های دینامیکی که می توانند رفتار دینامیکی پیچیده ای از خود نشان دهند، ارائه داده است. ساختار عدم قطعیت غالباً در دو نوع تقلیل پذیر (شناختی) و غیرقابل تغییر (آشکار) طبقه بندی می شود [2]. نمونه ای از عدم قطعیت تقلیل پذیر در شرایط اولیه عدم قطعیت دیده می شود که می توان با اندازه گیری های مستمر در سطح سیستم، بهبود یافته و در طول زمان کاهش یابد. همچنین عدم قطعیت آشکار یک عدم قطعیت در پارامترهای سیستم است که نتیجه تصادفی بودن ذاتی سیستم است. به طور خاص، عدم قطعیت اولیه هرگونه عدم قطعیت (معرفتی یا آشکار) است که بتوان آن را در هنگام بررسی ورودی های سیستم در نظر گرفت و عدم قطعیت ثانویه، عدم قطعیتی است که در خروجی سیستم قابل بررسی است. در هنگام بررسی همگرایی سیستم این نکته حایز اهمیت است که زیرسیستم های ایجاد شده تا چه اندازه با ساختارهای سیستم مادر، همسو هستند و برای برقراری این همگرایی چگونه در ساختار کنترل های سیستمی قرار خواهند گرفت. ادبیات نشان داده است که سیستم های دینامیکی غیرخطی از کنترل پذیری بیش تری برخوردار هستند. درحالی که این کنترل پذیری با افزایش پارامترهای سیستم، فضای نااطمینانی بیش تری ایجاد می کند و پارامترهای سیستم (بازیگران) هیچ گونه تابع قیدی مشخص را در ایجاد همگرایی تولید نمی کنند. در این پژوهش، در مرحله اول با استفاده از یک بازی غیرهمکار نوع هزینه و توابع پرداخت در سیستم های کنترل پذیر مورد بررسی قرار گرفته است و در مرحله دوم با استفاده از ساختار بازی های استاکلبرگ و با در نظر گرفتن تعادل های مختلف در ساختارهای غیرکنترل پذیر، همگرایی سیستم هایی دینامیکی با تئوری صف در یک ساختار قطعی بررسی شده است، لذا ابتدا پارامترهای کلیدی در ساختارهای کنترل پذیر و غیرکنترل پذیر به صورت مستقل انتخاب و با استفاده از آن پارامترهای سیستم (بازیگران) ارائه شده است. در این خصوص، تعادل نش یکتا برای یک بازی غیرهمکار و نقطه های تعادل برای کنترل بهینه از طریق بازی های برگشت پذیر استاکلبرگ به صورت مستقل ایجاد شده است.

۲- مبانی نظری

تحلیل حساسیت سیستم های دینامیکی شامل ارزیابی مشتقات جزئی خروجی های سیستم با توجه به کمیت های نامشخص و غیرقطعی است و برای مسایلی که تقریباً خطی هستند به خوبی کار می کند، به همین دلیل اثر عدم قطعیت احتمالی در پارامترهای ورودی و شرایط اولیه بر خروجی یک سیستم دینامیکی که ممکن است رفتار دینامیکی پیچیده ای از خود نشان دهد، حایز اهمیت می باشد. تجزیه و تحلیل در فضای غیرقطعی هنگامی نتیجه مطلوبی خواهد داشت که رفتار سیستم کاملاً از حالت خطی خارج شده باشد. رفتار کاملاً غیرخطی انشعاب هایی را نشان می دهد که به پارامترهای نامشخص و برون زای سیستم بستگی دارد و از طریق معیارهای ثابت سیستم در خروجی تصویر می شود [3]. مطالعات در پژوهش های [4] - [6]، نشان داد برای همگرایی سیستم های دینامیکی و تئوری صف از استراتژی های بهینه در صف های مارکوف فازی (پارامترهای سیستم همه اعداد فازی هستند) استفاده می شود. در مطالعات انجام شده، از ابزارهای منطق فازی و تئوری صف برای بررسی توابع عضویت استراتژی های بهینه و تعادل در هر ۲ حالت آشکار و معرفتی استفاده شده است. در ساختارهای گذشته با استفاده از اصل برش α برنامه های غیرخطی پارامتریک برای توصیف خانواده ای از استراتژی های سیستم بررسی و با توجه به تابع لیاپانوف و عملگرهای دیفرانسیلی، توابع عضویت استراتژی ها در مدل های تک و چندسرور استخراج گردیده است. یکی از مهم ترین نتایج به دست آمده در رویکرد هم زمان سیستم های دینامیکی و تئوری صف، این بوده است که مقدار و نوع تعادل و استراتژی های بهینه از هیچ رابطه قطعی تبعیت نمی کند و این می تواند با نتایج تئوری صف به ویژه در ساختارهای $M/M/S/K$ تناقض های آشکار ایجاد نماید. به همین دلیل در بررسی و تحلیل معیارهای عملکرد صف هایی ایجاد شد در سیستم های دینامیکی که به جای مقادیر واضح از اعداد فازی و غیرقطعی استفاده می کند [7]. در تئوری صف فازی متغیرهایی مانند تعداد فرآیندها، زمان انتظار، نرخ ورود و نرخ خدمات به عنوان مقادیر غیر منفی در نظر گرفته می شود. در ضمن فرض می شود که زمان انتظار فرآیند تبدیل ورودی به خروجی در صف های غیرقطعی در حالت پایدار است. در بررسی و تحلیل معیارهای عملکرد، صف های ایجاد شده در سیستم های دینامیکی به جای مقادیر واضح از اعداد فازی و غیرقطعی استفاده می شود این خروجی که به صورت هم زمان بر روی سیستم و صف های ایجاد شده (تحلیل ورودی ها و ایجاد خروجی) اثر می گذارد، می تواند به شرایط زیر وابسته باشد [8].

یک سیستم صف را در نظر بگیرید که در آن فرآیندها طبق فرآیند پواسون تعریف شده و نرخ خدمات می تواند از توزیع نمایی پیروی کند. نرخ ورود فازی λ و نرخ خدمات μ همه اعداد فازی مثالی در فضای مشخص شده در رابطه های (۱) و (۲) هستند.

$$\tilde{\lambda} = \{(x, \tilde{\lambda}(x)) \uparrow x \in X\}, \quad (1)$$

$$\tilde{\mu} = \{(y, \phi_{\tilde{\mu}}(y)) \uparrow y \in Y\}. \quad (2)$$

فرض کنید نرخ ورود و نرخ خدمات تقریباً شناخته شده است و می‌تواند با مجموعه‌های فازی محدب نشان داده شود. معیارهای عملکرد سیستم یعنی میانگین تعداد فرایندها در سیستم، زمان انتظار فرایندها در سیستم و احتمال بیکار بودن سیستم به ترتیب توسط رابطه (۳) تا رابطه (۵) نشان داده می‌شود.

$$\tilde{L}_s = \frac{\tilde{\lambda}}{n\tilde{\mu} - \tilde{\lambda}}, \quad (3)$$

$$\tilde{W}_s = \frac{n}{n\tilde{\mu} - \tilde{\lambda}}, \quad (4)$$

$$\tilde{\rho} = \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}}. \quad (5)$$

به عبارت دقیق‌تر تعیین این احتمال که اگر تعداد فرایندها در سیستم از عدد معینی مانند K (به عنوان مرز رضایت‌مندی) بیش‌تر شود تا چه اندازه این اتلاف زمان باعث خروج فرایند از سیستم خواهد شد (بدون تحلیل و بررسی برای تبدیل شدن به خروجی)، در ساختار غیرقطعی رویکردی جدید ارایه می‌دهد. در این مطالعه سیستم‌های دینامیکی مدل‌های صف با خطوط انتظار تک‌مرحله‌ای مورد بررسی قرار گرفته است که از چندسرور متفاوت و مستعد همکاری در سیستم و یا زیرسیستم‌های آن استفاده می‌کند. در ادامه مفروضات اولیه برای سبک ساختار نوبت‌دهی $FM / FM / S / K$ ، ارایه شده است [9].

۱. تحلیل صف در سیستم‌های دینامیکی در طول دوره زمانی $[t, t + \Delta t]$ فقط به طول دوره زمانی بستگی دارد. جایی که در آن نرخ ورودی‌های سیستم و نرخ خدمات سرور بدون توجه به وضعیت سیستم ثابت است.

۲. زمان‌های خدمات به صورت تصاعدی توزیع می‌شود.

۳. تحلیل در سیستم بر اساس $FIFO$ (اول در اولین خروجی) اجرا می‌شود و نرخ‌های ورودی به سیستم حتماً باید پس از تحلیل در سیستم از صف خارج شده و به نرخ خروجی تبدیل شوند. به ورودی‌های سیستم که وارد سیستم نوبت‌دهی می‌شوند، زمان خدمات تقریباً به‌طور مساوی توزیع می‌شود [10].

در مدل $M / M / S / K$ فقط وضعیت یک ایستگاه بررسی و تحلیل ورودی‌ها مورد مطالعه قرار می‌گیرد که هزینه کل ارایه خدمات و انتظار برای آن خدمات را به حداقل می‌رساند در نظر می‌گیریم. در این خصوص فرض کنیم که:

۱. $\tilde{C}_w$: هزینه انتظار مشتری در صف انتظار در واحد زمان.

۲. $\tilde{L}_s$: تعداد مورد انتظار (متوسط) واحدها در سیستم.

۳. $\tilde{C}_s$: هزینه سرویس یک واحد باشد.

هزینه انتظار مورد انتظار در واحد زمان به صورت رابطه (۶) تعریف می‌شود:

$$\tilde{C}_w \times \tilde{L}_s = \tilde{C}_w \times \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda} - \tilde{\mu}}, \quad (6)$$

که در آن $\tilde{C}_s \times \tilde{\mu}$ هزینه خدمات مورد انتظار در واحد زمان است. همچنین مجموع هزینه‌ها از رابطه (۷) حاصل می‌شود.

$$C = \tilde{C}_w \times \tilde{L}_s + \tilde{C}_s \times \tilde{\mu}. \quad (7)$$

این رابطه پس از فازی‌زدایی هنگامی دارای کمترین مقدار است که رابطه (۸) را نتیجه می‌دهد.

$$\frac{dC}{d\mu} = \frac{d(C_w \times L_s + C_s \times \mu)}{d\mu} = 0 \Rightarrow C_s - C_w \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)^2} = 0. \quad (8)$$

و از رابطه (۸) نرخ خدمات بهینه به صورت رابطه (۹) تعیین می شود.

$$\mu^* = \lambda + \sqrt{\frac{C_w}{C_s} \times \lambda}. \quad (9)$$

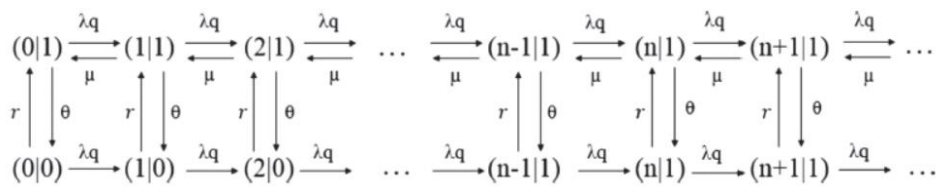
حال فرض کنیم که n ایستگاه خدمات وجود دارد، هر ایستگاه خدمات بر اساس برنامه خود یک صف دارد، هر مشتری ورودی به احتمال $\frac{1}{n}$ در هر صف می پیوندد. به عنوان n صف برنامه ریزی شده نامیده می شود. میانگین نرخ ورود $\frac{\lambda}{n}$ است و میانگین نرخ سرویس μ است. در این حالت رابطه ها به صورت رابطه های (۱۰) و (۱۱) تبدیل می شوند.

$$L_q = \frac{\lambda^2}{n\mu(n\mu - \lambda)}. \quad (10)$$

$$\tilde{W}_s = \frac{n}{n\tilde{\mu} - \tilde{\lambda}}. \quad (11)$$

با توجه به بهینه نمودن رابطه ها در ساختار $C = C_w \times L_s + C_s \times \mu$ دست یابی به یک بهینه مشترک تایید می شود. این پارامتر بهینه از سوی مدیر سیستم بر روی عملکرد خدمات دهندگان و همچنین مشتریان اثرگذار می باشد و منجر به یک تعادل بهینه خواهد شد.

یک صف نامطمئن مارکوفین $M/M/S$ با وضعیت سیستم زوج مرتب $(N(t), I(t))$ مشخص می شود که در آن $N(t)$ تعداد مشتریان سیستم است و $I(t)$ وضعیت سرور در زمان t که در صورت فعال بودن سرور ۱ و در صورت خرابی ۰ می گیرد. این سیستم در زمان ورود مشتری کاملاً غیر قابل مشاهده است. از آنجایی که مشتریان همگن هستند، فرض می کنیم که هر مشتری ورودی با احتمال q به سیستم می پیوندد و نرخ پیوستن $\lambda_e = \lambda q$ را ایجاد می کند. فرآیند تصادفی $\{N(t), I(t), t \geq 0\}$ یک زنجیره مارکوف زمانی، پیوسته با فضای حالت $S = \{(n, I), n \geq 0\} \cup \{(n, 0), n \geq 0\}$ است و نمودار انتقال مرتبط با آن به صورت شکل ۱ می باشد [11].



شکل ۱- فرآیند تصادفی در زنجیره مارکوفین.

Figure 1- Stochastic process in a Markov chain.

مهم ترین مساله سیستم، مربوط به مدیر خدمات دهندگان است که می خواهد قیمت خدمات یکسانی را برای همه مشتریان تعیین کند. باید در نظر داشت که برخی از خدمات دهندگان او ممکن است با کاهش کارایی (ناشی از شلوغی سیستم، عدم تخصص و توانایی و ...) مواجه شود که منجر به قطع شدن یکی از صف ها و یا کاهش سرعت خدمات می شود. در این مطالعه فرض می کنیم مشتریان به طور متوالی وارد می شوند و مدیر سیستم قبل از این که مشتریان تصمیم خود را برای پیوستن به سیستم یا انتخاب یک فرصت درونی و یا بیرونی بگیرند، خط مشی ارتباط با مشتریان را اتخاذ می کند. در این حالت، یک مشتری پس از ورود به سیستم در مورد ساختارهای زیر اطلاعاتی برای تصمیم سازی خواهد داشت:

۱. تصمیم سرور (قیمت خدمات).
۲. پارامترهای سیستم و پارامترهای اقتصادی.
۳. تصمیمات اتخاذ شده توسط مشتریانی که قبل از او وارد شده اند.
۴. سفارش ورود او به سیستم و بنابراین تعداد مشتریانی که قبل از او وارد سیستم شده اند.
۵. تعداد مشتریان در صف.

۶. وضعیت سطح خدمت (شلوغی، عدم کارایی و ...).

در سیستم‌های صف استراتژیک، موقعیت‌های مشابه را در قالب مدل‌های ۲ مرحله‌ای مدل‌سازی می‌کنند. در مرحله اول، هدف مدیر سیستم تعیین نرخ خدمات و به حداکثر رساندن سود خود است که مشخصاً به تصمیمات مشتریان نیز بستگی دارد. در مرحله دوم، تعاملات استراتژیک مشتریان توسط یک بازی سلسله‌مراتبی غیر استاندارد با اطلاعات ناقص توصیف می‌شود، زیرا تعداد بازیکنان (مشتریان) نامشخص است. در ادامه این بررسی به صورت مستقل برای سیستم‌های دینامیکی با در نظر گرفتن ساختارهای غیرکنترل‌پذیر و کنترل‌پذیر تشریح شده است. ساختار سیستم‌های کنترل در محیط عدم قطعیت با سه موضوع اصلی قابلیت مشاهده، کنترل‌پذیری و پایداری در ارتباط است [12]. مشاهده‌پذیری توانایی مشاهده تمام پارامترها یا متغیرهای حالت در سیستم است. کنترل‌پذیری توانایی انتقال یک سیستم از هر حالت معین به هر حالت دلخواه است. همچنین پایداری اغلب به عنوان پاسخ محدود سیستم به هر ورودی محدود بیان می‌شود. هر سیستمی که در ساختار خود از این ۳ ویژگی حمایت کند، کنترل‌پذیری بهینه‌ای به همراه خواهد داشت. از طرفی عدم قطعیت چالشی را برای سیستم‌های کنترل‌شونده ایجاد می‌کند که تلاش دارد این ویژگی‌ها را با استفاده از اطلاعات محدود حفظ نماید [13]. مدل‌سازی سیستم‌های کنترل‌پذیر از آن جهت دشوار است که اغلب اطلاعات کمی در مورد سیستم و زیرسیستم‌های آن در دسترس است، در واقع بسیاری از سیستم‌های کنترل، هم‌زمان با نیازها و الزامات برای تولید طراحی می‌شوند. سیستم‌های دینامیکی و پویا برای برخی از سیستم‌ها و صنعت تولید در طول زمان متفاوت است. از طرفی اکثر سیستم‌های کنترلی با فرض سیستم‌های خطی زمان ثابت، طراحی می‌شوند. با این حال، همه سیستم‌هایی که در دنیای واقعی با آن‌ها مواجه می‌شوند، دارای اجزای غیرخطی هستند لذا حتی یک سیستم ساده نیز به معادله‌های دیفرانسیل پیچیده برای توصیف رفتار خود نیاز دارد. همچنین به دلیل اختلال‌های بیرونی، خطاهای ساخت، محیط کار و ... عدم قطعیت در سیستم مکانیکی وجود دارد. برای بررسی سیستم و زیرسیستم‌های کنترل‌شونده به طور گسترده از دو چارچوب نظریه احتمال و نظریه مجموعه‌های فازی برای توصیف عدم قطعیت سیستم استفاده شده است، اما به نظر می‌رسد نظریه مجموعه‌های فازی به دلیل محدودیت‌های کمتر نسبت به نظریه احتمال، برای بیان اکثر عدم قطعیت‌ها در کنترل صنعتی مناسب‌تر است [14]. زیرا اگر عدم قطعیت سیستم به صورت مجموعه فازی بیان شود فرآیند طراحی کنترل ساده‌تر است و هیچ قانون اگر-آن‌گاه در آن استفاده نمی‌شود و همچنین عدم قطعیت با محدودیت‌های کمتر از عدم قطعیت تصادفی، به عنوان درجه وقوع تفسیر می‌شود [15]. عدم قطعیت ارایه شده در این بررسی با زمان متغیر در نظر گرفته شده است، لذا یافتن پارامترهای بهینه برای متعادل کردن هزینه کنترل و عملکرد سیستم ضروری است [16]. زیرا یک ساختار کنترل‌کننده اغلب شامل چندین پارامتر قابل تنظیم است؛ بنابراین، روش‌های ایجادشده باید مبتنی بر چند هدف مستقل تنظیم و عملیاتی شوند. در سیستم‌های کنترل‌شده دست‌یابی به تعادل بین عملکرد کنترل، هزینه کنترل و تنظیم پارامترهای کنترل به عنوان طراحی بهینه شناخته می‌شود. برخی از پارامترهای کنترل مستقل و پراکنده هستند؛ بنابراین، هیچ رابطه قیدی بین آن‌ها وجود ندارد و تأثیر آن‌ها بر عملکرد سیستم نیز متفاوت است. در چنین مواردی، بهینه‌سازی یعنی به حداقل رساندن توابع هزینه که به پارامترهای مستقل مربوط می‌شود [17]. اگر پارامترهای قابل تنظیم در کنترل، یک تعادل نش را تشکیل دهند، سیستم در حالت بهینه قرار دارد. در هنگام ایجاد ساختارهای کنترل‌پذیر که نیازمند ایجاد تابع هزینه پویا می‌باشد، به محاسبه متعدد ضرورتی ندارد؛ یعنی تابع هزینه با وضعیت سیستم تغییر می‌کند و می‌توان گفت که محاسبه تابع هزینه پیشنهادی در این حالت از فرایند آسان‌تری برخوردار است. در واقع این روش نیازمند تکرارهای متعدد برای به دست آوردن جواب بهینه نیست. استفاده از تئوری بازی‌ها به عنوان مدل بهینه‌سازی یک روش بسیار کاربردی است، زیرا در بیش‌تر زمینه‌ها نوعی وابستگی متقابل بین افراد وجود دارد [18].

۳- مواد و روش‌ها

ابتدا پارامترهای اصلی با در نظر گرفتن ساختارهای کنترل‌پذیر در سیستم و با توجه به ساختار دینامیکی فازی به صورت جدول ۱ ارایه شده است.

جدول ۱- پارامترهای استفاده شده در ساختارهای کنترل‌پذیر سیستم.

Table 1- Parameters used in the controllable structures of the system.

نماد	کاربرد	نماد	کاربرد
J_1 / J_2	توابع هزینه	A	ماتریس مورد استفاده در سیستم
Q_{oi}	مجموعه فازی از q_{oi}	B	ماتریس ورودی
D_i	مجموعه فازی از γ_i	q	متغیر حالت
N_{qi}	ساختار کلی از q_{oi}	q_o	بردار حالت ابتدایی
$N_{\gamma i}$	ساختار کلی از γ_{oi}	λ	پارامتر غیرقطعی

جدول ۱- ادامه.

Table 1- Continued.

نماد	کاربرد	نماد	کاربرد
P	حل معادله ریکاتی	τ	کنترل ورودی
γ_i	امین عنصر از λ	∇B	عدم قطعیت ماتریس ورودی
α, β	اعداد فازی مربوط به کران بالای d	d	اختلال
M	ماتریس شرایط تطبیق	q_{oi}	ith عنصر از q_o
$\zeta M_2, \zeta M_1$	اعداد فازی مربوط به M	ψ, K	پارامترهای کنترل گر
V	تابع لیاپانوف	ρ	شاخص عملکرد گذرا
(ψ^*, K^*)	ترکیب ساختار در تعادل نش	ρ_∞	شاخص عملکرد پایدار

یک سیستم مکانیکی با عدم قطعیت زمان به صورت رابطه (۱۲) تعریف می شود.

$$\dot{q}(t) = Aq(t) + (B + \nabla B(q(t), \gamma(t), t))\tau(t) + Bd(q(t), \gamma(t), t) \quad \& \quad q_0 = q(t_0), \quad (12)$$

که در آن t پارامتر زمان $q(t) \in R^n$ به عنوان متغیرهای حالت، q_0 به عنوان بردار ورودی حالت، A و B ماتریس هایی در فضای $R^{n \times n}$ و $R^{n \times m}$ ، $\tau(t) \in R^n$ به عنوان بردار کنترل، ماتریس $\nabla B(., t) \in R^{n \times m}$ و اختلال بیرونی $d(., t) \in R^m$ به وسیله ساختار غیرقطعی $\gamma(t) \in R^l$ و بردار حالت $q(t)$ تعیین می شوند که هر دوی آن ها پیوسته و در فضای ریمان قابل اندازه گیری هستند. بدون کاستن از کلیت مساله فرض می شود که زوج مرتب (A, B) پایدار است. همچنین $Aq(t) + B\tau(t)$ بخشی از ساختار خطی رابطه (۱۲) است. این سیستم در واقع به دلیل عدم قطعیت متغیر با زمان $\gamma(t)$ و $d(., t)$ غیر خطی است. هدف از فرض پایداری زوج مرتب (A, B) این است که ورودی کنترل $\tau(t)$ را می توان برای تثبیت قسمت خطی $Aq(t) + B\tau(t)$ اعمال کرد. به عبارت دیگر، اگر این فرض برقرار نباشد سیستم مکانیکی پایدار نخواهد بود. از طرفی فرض می شود که مجموعه های فازی Q_{oi} و D_i وجود دارند که می توانند برای توصیف هر ورودی از q_0 و γ استفاده شوند. به گونه ای که رابطه های (۱۳) و (۱۴) برقرار باشد.

$$Q_{oi} = \{(q_{oi}, \mu_{N_{qi}}(q_{oi})) \mid q_{oi} \in N_{qi}\}. \quad (13)$$

$$D_i = \{(\gamma_i, \mu_{N_{\gamma_i}}(\gamma_i)) \mid \gamma_i \in N_{\gamma_i}\}, \quad (14)$$

که در آن Q_{oi} و D_i مجموعه های فازی q_{oi} و γ_i را نشان می دهند، q_{oi} و γ_i به ترتیب ورودی های q_0 و γ هستند، N_{γ_i} و N_{qi} به ترتیب بیانگر q_{oi} و γ_i هستند. همچنین $\mu_{N_{\gamma_i}}: N_{\gamma_i} \rightarrow [0, 1]$ و $\mu_{N_{qi}}: N_{qi} \rightarrow [0, 1]$ برای بیان توابع عضویت Q_{oi} و D_i استفاده شده است. هر چه مقدار تابع عضویت به ۱ نزدیک تر باشد احتمال بیش تری وجود دارد که عدد فازی در آن جا مقدار بگیرد. در غیر این صورت، ۰ کمترین مقدار ممکن را نشان می دهد؛ بنابراین، تابع عضویت را می توان به عنوان توصیفی از درجه وقوع اعداد فازی در نظر گرفت. باید در نظر داشت، فرض ۲ یک حد فازی برای پارامترهای نامشخص حالت اولیه q_0 و معرفی می کند. در رابطه (۱) تئوری مجموعه های فازی برای توصیف عدم قطعیت سیستم استفاده شده است؛ بنابراین، سیستم ۱ نیز FDS نامیده می شود. در مقایسه با روش تئوری احتمال که نیاز دارد به دست آوردن مقدار زیادی داده که با استفاده از توصیف فازی برای نشان دادن درجه وقوع به جای فراوانی وقوع مزیت بیش تری دارد. علاوه بر این، هیچ قانون فازی برای استنتاج عدم قطعیت در این جا وجود ندارد؛ بنابراین، نیاز طراحان به اندازه استفاده از نظریه منطق فازی نیست. برای برقرار بودن فرض های پژوهش بعدی و طراحی یک ساختار کنترل شونده کنترل از یک معادله ریکاتی اولیه به صورت رابطه (۱۵) استفاده شده است.

$$A^T P + PA - 2PBH^{-1}B^T P + R = 0, \quad (15)$$

که در آن $R > 0$ و $D(h) \in R_+$. همچنین می توان گفت، راه حل P وجود دارد و منحصر به فرد است اگر (A, B) پایدار باشد.

همچنین می توان فرض نمود، اعداد فازی α و β وجود دارد به طوری که برای هر $(q, t) \in R^n \times R$ رابطه (۱۶) برقرار باشد.

$$\|d(q, \gamma, t)\| \leq \alpha \|q\| + \beta. \quad (16)$$

به این ترتیب، یک ماتریس $M(q, \gamma, t)$ وجود دارد به طوری که $\nabla B(q, \gamma, t) = BM(q, \gamma, t)$. از طرفی می‌توان گفت اعداد فازی ζ_{M_1} و ζ_{M_2} وجود دارد به طوری که برای هر $(q, t) \in R^n \times R$ رابطه (۱۷) برقرار است.

$$\frac{1}{2} \lambda_{\min}(M(q, \gamma, t))H^{-1} + H^{-1}H^T((q, \gamma, t)) \geq \zeta_{M_1} > -\lambda_{\min}(H^{-1}), \quad (17)$$

که در آن $\|M(q, \gamma, t)\| \leq \zeta_{M_2}$.

این رابطه‌ها بر اساس عدم قطعیت‌های داخلی و بیرونی سیستم طرح‌ریزی شده که نشان می‌دهد، اختلالات در سیستم دارای حد بالایی هستند، زیرا کنترل سیستمی بدون مرزهای بالایی امکان‌پذیر نیست. فرض $\nabla B(q, \gamma, t) = BM(q, \gamma, t)$ یک شرط تطبیق برای عدم قطعیت را نشان می‌دهد یعنی قسمت نامشخص ماتریس ورودی در محدوده ماتریس ورودی اسمی B قرار دارد. از طرفی، جهت ورودی کنترل $\tau(t)$ تحت تاثیر عدم قطعیت نیست و در واقع همیشه برای سیستم‌های فیزیکی معتبر است. در واقع عدم قطعیت ماتریس ورودی، محدود است و می‌توان از پارامتر عدم قطعیت محدود استنباط نمود. با توجه به این که اعداد فازی α و β با عدم قطعیت مرتبط هستند، تابع عضویت α و β را می‌توان با استفاده از محاسبات فازی، تئوری تجزیه و تابع عضویت عدم قطعیت به دست آورد. در شرایطی که ساختار کلی N_γ شناخته شده است، مقادیر ζ_{M_1} و ζ_{M_2} را می‌توان به راحتی تخمین زد. در عمل، انتخاب N_γ تا حد زیادی به طراح و سیستم کنترل شده بستگی دارد. برای یک سیستم خاص محدوده عدم قطعیت قابل تحمل بسیار متفاوت است و طراحان مختلف نیز معیارهای متفاوتی برای تعریف محدوده عدم قطعیت دارند. با طراحی کنترل $\tau(t)$ ، انتظار می‌رود پس از اعمال کنترل، سیستم بتواند به یک عملکرد قطعی با ایجاد یک مرز یکنواخت دست یابد. این مرز نشان می‌دهد که برای هر $h > 0$ عدد $D(h) \in R_+$ وجود دارد. اگر $\|q(t_0)\| \leq h$ آن‌گاه برای هر $t \geq t_0$ ، جایی که $D(h)$ نشان‌دهنده مرز یکنواخت سیستم است. این مرزبندی با اعمال ساختارهای کنترل‌پذیر در یک محیط بازی غیرهمکار، می‌تواند به یک مرز نهایی و پایدار گسترش یافته به طوری که برای هر $h > 0$ اگر $\|q(t_0)\| \leq h$ آن‌گاه $\|q(t)\| \leq \bar{D}(h)$ زمانی که $t \geq t_0 \pm T(\bar{D}(h), h)$ یک عدد حقیقی مثبت متناهی است، $\bar{D}(h)$ مرز یکنواخت نهایی سیستم است.

۴- تجزیه و تحلیل

۴-۱- بررسی بازی با در نظر گرفتن ساختار کنترل‌پذیری سیستم

در سیستم‌های کنترل‌پذیر دست‌یابی به تعادل بین عملکرد کنترل و هزینه کنترل با تنظیم پارامترهای کنترل به عنوان طراحی بهینه شناخته می‌شود. با توجه به این که برخی از پارامترهای کنترل، مستقل و پراکنده هستند، هیچ رابطه قیدی بین آن‌ها وجود ندارد و در نتیجه تاثیر آن‌ها بر عملکرد سیستم نیز متفاوت است. برای ایجاد یک ساختار بهینه، ابتدا پارامترهای کلیدی در کنترل انتخاب شده و با آن‌ها به عنوان بازیکن رفتار می‌شود. سپس، قوانین بازی مدل و فرمول‌نویسی می‌شود [19]. به عنوان نمونه تابع هزینه هر پارامتر (بازیکن) طراحی شده و در نهایت نقطه تعادل برای کنترل بهینه از طریق تعریف تعادل نش ایجاد شده تعیین می‌شود. در این بررسی نیز مسایل کنترل و بهینه‌سازی مبتنی بر سیستم‌های دینامیکی است. وجود و منحصر به فرد بودن راه حل بهینه مورد بررسی قرار می‌گیرد، از این رو امکان بهینه‌سازی ساختاری در سطح سیستم ارزیابی می‌شود. وجود و منحصر به فرد بودن تعادل نش برای مدل بازی غیرهمکاری طراحی شده ثابت شده است. عدم قطعیت سیستم در زمینه کنترل به صورت مجموعه فازی اعمال می‌شود، دو مزیت قابل توجه دارد: ۱- فرآیند طراحی کنترل ساده‌تر است و قانون «اگر-آن‌گاه» در آن وجود ندارد و ۲- عدم قطعیت با محدودیت‌های کمتر از عدم قطعیت تصادفی به عنوان درجه وقوع تفسیر می‌شود. مطابق مطالعات گذشته، سیستم‌های بررسی شده که در محیط عدم قطعیت قرار دارند، ساختار کنترلی را مطابق رابطه‌های (۱۸) و (۱۹) تعیین می‌کند.

$$\tau = H^{-1}B^T P q - \psi \vartheta(q) H^{-1}B^T P q. \quad (18)$$

$$\vartheta(q) = \|B^T P q\|^{\frac{1-2\kappa}{\kappa}} (\sigma_1 \|q\| + \sigma_2)^{\frac{1}{\kappa}}, \quad (19)$$

که در آن $\sigma_{1,2}$ و ψ اعداد حقیقی کاملاً مثبت هستند، $\kappa \in (0, 0.5]$ و P حل معادله Riccati است. با توجه به این که $\vartheta(q)$ یک تابع مثبت و در حال تغییر است؛ بنابراین، ساختار کنترلی در رابطه (۱۹) پیوسته است. این ساختار کنترلی از دو بخش تشکیل شده است. عبارت اول یک قسمت کنترل اسمی است که به سیستم قطعی می‌پردازد و عبارت دوم به عدم قطعیت در سیستم می‌پردازد. از رابطه (۲۰) می‌توان دریافت که محدوده مرز

یکنواخت نهایی تحت تاثیر پارامترهای طراحی ψ و κ است. محدوده مرز یکنواخت نهایی عملکرد سیستم را منعکس می کند، به این معنی که مقدار ψ و κ مبادله بین عملکرد سیستم و هزینه کنترل را تعیین می کند.

$$\|q\| > \sqrt{\frac{f\eta^{\frac{-\kappa}{1-\kappa}} \sigma^{\frac{1}{1-\kappa}}}{\lambda_{\min}(R)}}. \quad (20)$$

با توجه به عملکرد سیستم که در ساختار غیرکنترلی تعیین شد، تعادل بازی باید در یک ساختار بهم پیوسته پویا تضمین شود، لذا تحت پیشنهادهای ارائه شده در ساختار غیرکنترلی، کران اولیه و نهایی یکنواخت شده قابل ارایه است. از آنجایی که بهینه سازی ارایه شده بر اساس یک بازی غیرهمکارانه پیوسته تشکیل شده است، حالت بهینه سیستم با در نظر گرفتن پارامترهای ψ و κ از چند هدف مستقل تشکیل شده است. همچنین انتخاب های ψ و κ مستقل هستند و در هنگام بهره مندی از ساختارهای کنترل شونده نیز می توان از بازی های غیرهمکاری برای تحلیل و حل سیستماتیک مساله نمود. با توجه به این که پارامترهای ψ و κ بر عملکرد و هزینه کنترل تاثیرگذار است، این دو پارامتر به عنوان پارامترهای کنترل و دو بازیکن مستقل در ساختار سیستم تعریف شده است و به صورت فرضی، مجموعه تصمیم گیری آن ها $S_1 = (0, \infty)$ و $S_2 = (0, 0.5]$ در نظر گرفته شده است. در ادامه تابع هزینه برای بازیگر طراحی شده است. قبل از ساخت یک تابع هزینه که ساختارهای سیستم را تحت عملکردهای کنترل شونده و پویا ارزیابی و تحلیل نماید، ابتدا عملکرد قطعی سیستم در فضای غیرقطعی بررسی و برای آن رابطه (۲۱) برقرار شده است.

$$\frac{1}{2} \lambda_{\min}(P) \|q\|^2 \leq V = q^T p q \leq \lambda_{\max}(P) \|q\|^2 \Rightarrow -\|q\|^2 \leq -\frac{1}{\lambda_{\max}(P)} V, \quad (21)$$

که در آن برای بررسی پایداری عملگرهای دیفرانسیلی و پارامترهای کنترلی سیستم، از تابع لیپانوف V به عنوان تابعی اسکالر روی فضای فازی استفاده شده است. به عنوان یکی از مزیت های تابع لیپانوف، به پاسخ واقعی توابع کونولوشن $X(t)Y(t)$ ، نیاز نیست، لذا این روش شرایطی را به منظور مطالعه نقطه تعادل یک سیستم فراهم می کند.

با تجزیه و تحلیل فوق، توابع هزینه برای ۲ بازیکن از رابطه های (۲۲) و (۲۳) ایجاد می شود [20].

$$\mathcal{J}_1 = \chi_1 D \left[\int_{t_s}^{\infty} \rho^2(\sigma, \psi, \kappa, T, t_s) dT \right] + \chi_2 D[\rho_{\infty}^2(\sigma, \psi, \kappa, T, t_s)] + \chi_3 \psi^2, \quad (22)$$

↓

$$\mathcal{J}_1 = \chi_1 \mathcal{J}_{11}(\psi, \kappa) + \chi_2 \mathcal{J}_{12}(\psi, \kappa) + \chi_3 \mathcal{J}_{13}(\psi).$$

$$\mathcal{J}_2 = \chi_1 D \left[\int_{t_s}^{\infty} \rho^2(\sigma, \psi, \kappa, T, t_s) dT \right] + \chi_2 D[\rho_{\infty}^2(\sigma, \psi, \kappa, T, t_s)] + \chi_3 \kappa^2, \quad (23)$$

↓

$$\mathcal{J}_2 = \chi_1 \mathcal{J}_{21}(\psi, \kappa) + \chi_2 \mathcal{J}_{22}(\psi, \kappa) + \chi_3 \mathcal{J}_{23}(\kappa).$$

بدون کاستن از کلیت مساله فرض می شود هر یک از پارامترهای $\sigma, \psi, \kappa, t_s$ تحت کنترل های سیستم و با در نظر داشتن $T \rightarrow \infty$ ، $\rho(\sigma, \psi, \kappa, T, t_s) \rightarrow 0$ به عنوان بخش گذرا از عملکرد قطعی سیستم در نظر گرفته شود و $\rho_{\infty}(\sigma, \psi, \kappa, T, t_s)$ بخش حالت پایدار آن باشد. با این حال، هر یک از مفروضات شامل اعداد فازی α ، β ، ζM_1 ، ζM_2 هستند، لذا این مقادیر در ساختار قطعی قابل ارایه نیستند. به همین دلیل قبل از تجزیه و تحلیل دو عبارت، لازم است عملیات فازی دایی انجام شود. با توجه به ساختار مستقل هر دو بازیگر، ساخت دو تابع هزینه مشابه است که از ۳ قسمت زیر تشکیل شده است:

۱. $\mathcal{J}_{11}(\psi, \kappa)$ و $\mathcal{J}_{21}(\psi, \kappa)$ را می توان به عنوان میانگین عملکرد کلی گذرا از زمان t_s تفسیر کرد.

۲. $\mathcal{J}_{12}(\psi, \kappa)$ و $\mathcal{J}_{22}(\psi, \kappa)$ را می توان به عنوان میانگین عملکرد کلی حالت پایدار تفسیر کرد.

۳. $\mathcal{J}_{13}(\psi)$ و $\mathcal{J}_{23}(\kappa)$ را می توان به عنوان هزینه های کنترل در نظر گرفت.

همچنین ضریب‌های دلخواه $\chi_1, \chi_2, \chi_3 > 0$ را می‌توان به عنوان ضریب‌های وزنی در نظر گرفت. در گام اول شاخص‌های موجود در تابع هزینه تعیین و در ادامه پارامترهایی که باید بهینه شوند با شاخص‌های انتخابی همبستگی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. به عبارت دیگر، تابع شاخص‌های عملکرد در مورد پارامترهایی که باید بهینه‌سازی شوند ساخته می‌شود. در نهایت شکل مشخص تابع هزینه براساس شاخص‌های طراحی شده ارائه می‌شود. چارچوب اولیه بازی در رابطه (۲۴) نشان داده شده است.

$$\int_{t_s}^{\infty} \rho^2(\sigma, \psi, \kappa, t_s) = [V_s - kf(\psi, \kappa) \eta^{\frac{-\kappa}{1-\kappa}} \sigma^{\frac{1}{1-\kappa}}]^2 \frac{k}{2}, \quad (24)$$

که با استفاده از اپراتور دیفرانسیل، به صورت رابطه (۲۵) بیان شده است.

$$D[\int_{t_s}^{\infty} \rho^2(\sigma, \psi, \kappa, t_s)] =: \omega_1 - f\omega_2\omega_3^{\frac{1}{1-\kappa}} + f^2\omega_4\omega_5^{\frac{1}{1-\kappa}}, \quad (25)$$

که در آن خواهیم داشت:

$$\omega_1 := \frac{k}{2} D[V_s^2]; \omega_2 := k^2 D[V_s] D[\eta]; \omega_3 := \frac{D[\sigma]}{D[\eta]}; \omega_4 := \frac{k^3}{2} D[\eta^2]; \omega_5 := \frac{D[\sigma^2]}{D[\eta^2]}.$$

با توجه شرایط تعریف شده توابع هزینه به صورت رابطه‌های (۲۶) و (۲۷) تعریف شده است.

$$\mathcal{J}_1 = \chi_1 \left(\omega_1 - f(\psi, \kappa) \omega_2 \omega_3^{\frac{1}{1-\kappa}} + f^2(\psi, \kappa) \omega_4 \omega_5^{\frac{1}{1-\kappa}} \right) + \chi_2 f^2(\psi, \kappa) \omega_5^{\frac{1}{1-\kappa}} \omega_6 + \chi_3 \psi^2. \quad (26)$$

$$\mathcal{J}_2 = \chi_1 \left(\omega_1 - f(\psi, \kappa) \omega_2 \omega_3^{\frac{1}{1-\kappa}} + f^2(\psi, \kappa) \omega_4 \omega_5^{\frac{1}{1-\kappa}} \right) + \chi_2 f^2(\psi, \kappa) \omega_5^{\frac{1}{1-\kappa}} \omega_6 + \chi_3 \kappa^2, \quad (27)$$

که در آن $\omega_6 := k^2 D[\eta^2]$. از تابع هزینه بالا مشاهده می‌شود که تصمیم بازیکنان ψ و κ (مقدار آن‌ها) بر عملکرد سیستم و هزینه کنترل آن تاثیر می‌گذارد. چگونگی تعادل رابطه بین عملکرد سیستم و هزینه‌های ایجاد شده برای ایجاد کنترل بهینه در سیستم به عنوان هدف‌های مینیمم‌سازی قابل ارائه است، لذا ترکیب تصمیم‌گیری تعادل نش (ψ^*, κ^*) برای کنترل پیشنهادی معادل مساله ارائه شده در رابطه (۲۸) است.

$$\begin{aligned} 1) \min \mathcal{J}_1(\psi, \kappa^*); \psi \in S, \\ 2) \min \mathcal{J}_2(\psi^*, \kappa); \kappa \in S. \end{aligned} \quad (28)$$

به طور مشخص برای به دست آوردن جواب معادله‌های فوق، به ترتیب مشتق مرتبه اول $\mathcal{J}_1(\psi, \kappa^*)$ و $\mathcal{J}_2(\psi^*, \kappa)$ نسبت به پارامترهای ψ و κ تعیین شده است که در رابطه‌های (۲۹) و (۳۰) قابل مشاهده است.

$$\frac{\partial \mathcal{J}_1(\psi, \kappa^*)}{\partial \psi} = -\chi_1 \left(\omega_1 - \frac{\partial f(\psi, \kappa^*)}{\partial \psi} \omega_2 \omega_3^{\frac{1}{1-\kappa}} + \frac{\partial f^2(\psi, \kappa^*)}{\partial \psi} \omega_5^{\frac{1}{1-\kappa}} \right) (\chi_1 \omega_4 + \chi_2 \omega_6) + 2\chi_3 \psi \quad (29)$$

$$\frac{\partial \mathcal{J}_2(\psi^*, \kappa)}{\partial \kappa} = -\chi_1 \omega_2 \omega_3^{\frac{1}{1-\kappa}} (\partial f(\psi^*, \kappa) + \ln \omega_5 \left(\frac{1}{(1-\kappa^2)^2} \right) + \frac{\partial f^2(\psi^*, \kappa)}{\partial \kappa}) + \dots + 2\chi_3 \kappa \quad (30)$$

با توجه به تعریف تعادل نش، هر بازیکنی که تصمیم فعلی را تغییر دهد هزینه بیشتری متحمل خواهد شد. به عبارت دیگر، هنگامی که (ψ^*, κ^*) تعادل نش است، باید شرایط تعیین شده در رابطه‌های (۳۱) و (۳۲) برآورده شود.

$$\frac{\partial \mathcal{J}_2(\psi^*, \kappa)}{\partial \psi} = 0 \quad ; \psi = \psi^*, \quad (31)$$

$$\frac{\partial \mathcal{J}_2(\psi, \kappa^*)}{\partial \kappa} = 0 \quad ; \kappa = \kappa^*,$$

و با توجه به تعریف اکستریم‌های نسبی در مشتق مرتبه دوم باید شرایط در نظر گرفته شده در رابطه (۳۲) برقرار باشد.

$$\frac{\partial^2 \mathcal{J}_2(\psi, \kappa^*)}{\partial \kappa^2} > 0 \quad ; \kappa = \kappa^*, \quad (32)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{J}_2(\psi^*, \kappa)}{\partial \psi^2} > 0 \quad ; \psi = \psi^*.$$

لذا معادله اشاره شده شرایطی هستند که تعادل نش برای آن به صورت یکتا بررسی شده است.

۴-۲- بررسی بازی بدون در نظر گرفتن ساختارهای کنترلی

در این بخش، ساختار و رفتار سیستم بدون در نظر گرفتن کنترل‌های ساختاری سیستم برای هر سرور، مورد بررسی قرار گرفته است. ساخت تابع هزینه معادل تدوین قواعد در بازی است و عوامل بسیاری مانند عملکرد گذرا و حالت پایدار، اندازه خطا، هزینه کنترل، هزینه زمان و ... را می‌توان در نظر گرفت. با توجه به شرایط بهینه هر سرور و بدون در نظر گرفتن کنترل ساختاری در سیستم، ابتدا شاخص‌های موجود در تابع هزینه تعیین می‌شود. در ادامه پارامترهای اولیه بازی در هنگام عدم برقراری ساختار کنترل سیستم معرفی شده است. در این بررسی منظور از ساختار دینامیکی سیستم این است که در هنگام استفاده از نمونه‌های ورودی/خروجی برای ساختن سیستم‌های جدید، عملکرد خدمت‌دهنده‌های ضعیف و غیر موثر شناسایی و حذف می‌شود.

۱. $\tilde{y}_E$: هزینه‌های آشکار روند ارزیابی فرآیند در حالت فازی (تحلیل ورودی‌ها و تلاش برای تبدیل به خروجی مناسب برای سیستم).
۲. $\tilde{y}_I$: هزینه‌های ضمنی روند ارزیابی فرآیند در حالت فازی (تحلیل ورودی‌ها و تلاش برای تبدیل به خروجی مناسب برای سیستم).
۳. $\tilde{S}$: ارجحیت داخلی سیستم برای هر سرور در جهت تحلیل سریع و دقیق ورودی‌ها در حالت فازی.
۴. $\tilde{W}$: ارجحیت بیرونی سیستم برای هر سرور در جهت تحلیل سریع و دقیق ورودی‌های در حالت فازی.
۵. $\tilde{C}_P$: هزینه و ریسک‌های سیستم برای تسریع در روند ارزیابی سرورها در حالت فازی.
۶. $\tilde{C}_R$: هزینه سیستم برای ارایه ارجحیت سرورهایی که روند ارزیابی ورودی به خروجی مطلوب را در حالت فازی انجام می‌دهند.

از آنجایی که هزینه‌های $\tilde{C}_P$ و $\tilde{C}_R$ به طور مشخص به نوع سیستم و میزان صف‌های انتظار در سیستم وابسته است، می‌توان این دو پارامترها را با پارامترهای سیستم‌های صف چند خدمت‌دهنده ($\tilde{M} / \tilde{M} / S$) به صورت دو ساختار مکمل در نظر گرفت، اما واضح است که با افزایش هزینه‌ها در $\tilde{C}_P$ تسهیل در روند ارزیابی صورت گرفته و از هزینه $\tilde{C}_R$ کاسته می‌شود.

۱. π : مزایای روند ارزیابی ورودی به خروجی مطلوب در بین سرورها.
۲. d_{ij} : تقاضا برای روند ارزیابی ورودی به خروجی مطلوب از سوی خدمت‌دهنده i th به خدمت‌دهنده j th در زمانی که انتظار یک فرآیند در صف i th قرار دارد.
۳. d_{ij} : به عنوان ضریب π در نظر گرفته می‌شود و می‌تواند تقاضای سیستم را برای اشتراک گذاری روندها در بین سرورها اندازه‌گیری نماید.

با توجه به این که $d_{ij} \geq 1$ ، بنابراین $d \times \pi$ نشان‌دهنده مزایای سیستم با داشتن پلتفرم‌های تسهیل‌کننده می‌باشد. همچنین هزینه و ریسک‌های سیستم برای تسریع در روند ارزیابی سرورها در حالت فازی به صورت مشخص به زمان پاسخگویی وابسته است، در نتیجه پارامترهای $\tilde{C}_P$ و $\tilde{C}_R$ بر روی اثرگذار می‌باشد. همچنین پارامتر $\tilde{y}_E$ به عنوان هزینه آشکار تحلیل ورودی‌ها و تلاش برای تبدیل به خروجی مناسب برای سیستم به هزینه $d_{ij} \geq 1$

$\tilde{C}_p$ و $\tilde{C}_R$ به عنوان هزینه ضمنی تحلیل ورودی‌ها و تلاش برای تبدیل به خروجی مناسب برای سیستم به هزینه $\tilde{C}_R$ وابسته است. از طرفی پارامتر $\tilde{S}$ به عنوان ارجحیت داخلی سیستم برای هر سرور در جهت تحلیل سریع و دقیق ورودی‌ها در حالت فازی و $\tilde{W}$ به عنوان ارجحیت بیرونی سیستم برای هر سرور در جهت تحلیل سریع و دقیق ورودی‌های در حالت فازی همراه با پارامترهای $\tilde{Y}_I$ و $\tilde{Y}_E$ تسهیل‌کننده پارامترهای مرتبط با تئوری صف بوده و در نتیجه در کاهش صف‌های انتظار در سیستم نقشی حیاتی خواهند داشت. با توجه به پارامترهای تعریف شده در ساختارهای کنترلی و نوع ارتباط آن با سیستم‌های صف $M/M/S$ بازی رفتار سیستم بدون در نظر گرفتن کنترل‌های ساختاری سیستم در حالت پویا انجام می‌شود و نمی‌توان در حالت ایستا و به صورت هم‌زمان استراتژی‌های یک سیستم را در هنگام ارزیابی تقاضای سیستم برای اشتراک گذاری روندها، تعداد سرورها و زیرسیستم‌های فعال و غیرفعال، تعداد زیرسیستم‌های فعال برای همگرایی در اشتراک گذاری روندها و میزان پاسخگویی در تسهیل همگرایی اندازه‌گیری و مدل‌سازی نمود. همچنین این بازی باید به صورت اطلاعات کامل فرض شود زیرا یک زیرسیستم در هنگام انتظار در صف باید نسبت به هزینه و ریسک‌های سیستم، ارجحیت داخلی و بیرونی سیستم برای هر سرور در جهت تحلیل سریع و دقیق ورودی‌های در حالت فازی سایر سرورها، مزایای روند ارزیابی ورودی به خروجی مطلوب در بین سرورها و همچنین پلتفرم‌های تسهیل‌کننده همگرایی در سیستم آگاهی داشته باشد. با توجه به اینکه نتیجه ارجحیت داخلی و بیرونی در سطح سیستم که توسط سرورهای و زیرسیستم‌ها انجام می‌شود، منجر به همگرایی و کاهش صف‌های انتظار برای عملکردهای موازی در سیستم می‌شود، به طور مشخص پارامترهای $\tilde{C}_p$ ، $\tilde{C}_R$ ، $\tilde{Y}_I$ ، $\tilde{Y}_E$ و $d \times \pi$ در راستای استراتژی میزان همگرایی استفاده می‌شود، یک بازی در جهت میزان همگرایی در سیستم برای سرورها به عنوان تحلیلگران ورودی و خروجی در حالت فازی تحلیل می‌شود. در واقع سیستم‌ها محیطی را برای بررسی دقیق ورودی و خروجی فراهم می‌کند و سپس سرورهای تعریف شده، تصمیم می‌گیرند که متناسب با صف‌های ایجاد شده در سیستم و همچنین متناسب با سطح ارجحیت‌های ضمنی و آشکار سیستم، چگونه و تا چه اندازه به روند همگرا نمودن استراتژی‌های خود اقدام کنند، لذا در این بازی پویا با اطلاعات کامل دو بازیکن (سرورهای همگرا کننده و سیستم) وجود دارد. همچنین هر سیستم، از دو گره تشکیل شده است.

۱. در اولین گره، سرورهایی که برای همگرایی انتخاب شده‌اند، تصمیم می‌گیرد که آیا پلتفرم‌های تسهیل‌کننده همگرایی (بهره‌مندی کامل از ساختار دینامیکی سیستم و ارجحیت‌های داخلی و بیرونی) را با متحمل شدن هزینه‌های ارزیابی (در دو حالت ضمنی و آشکار) پیاده‌سازی کند یا خیر؛ بنابراین، انتخاب‌ها در این گره اول «با پلتفرم تسهیل‌کننده» و «بدون پلتفرم تسهیل‌کننده» است.
۲. در گره دوم، سیستم تصمیم می‌گیرد که به سرورهای انتخاب شده برای همگرایی، ارجحیت‌های داخلی و بیرونی را ارایه نماید یا خیر. پس در این حالت و انتخاب‌ها عبارت‌اند از: ارایه ارجحیت‌ها و عدم ارایه ارجحیت‌ها.

در ادامه مطابق جدول ۲، فرآیندها بازی برای همکاری با سایر سرورها برای تعیین تابع پرداخت سیستم تعیین و متناسب با استراتژی‌های تعیین شده ظرفیت ایجاد تعادل برای بازی در هر یک از فرآیندهای اشاره شده، احصا شد. با حل بازی به صورت استراتژی بازگشت به عقب، تعداد ۸ تابع پرداخت سیستم تعادل بازی تشکیل و شرایط تعادل مربوط به آن‌ها بررسی شده است. توابع پرداخت سیستم در ۵ مسیر تعادلی جمع‌بندی شده و در هر مورد ترکیبی منحصر به فرد از تصمیمات سیستم و سرورهای همگراکننده صف را نشان می‌دهد که منجر به ارزیابی سطح بهبود فرآیندها در سیستم می‌شود. باید توجه داشت مسیر تعادل، مسیری است که از اولین گره به آخرین گره منتهی می‌شود و در آن تعادل‌های احتمالی دنبال می‌شود، درحالی‌که تعادل، نمایه‌ای از استراتژی‌های بازیکنان است که اگر از بازیکن خواسته شود در استراتژی‌های بازی حرکت کند، عمل هر بازیکن را مشخص نماید. در این بازی ممکن است این امکان وجود داشته باشد که یک مسیر تعادلی با تعادل‌های متعدد دنبال شود.

جدول ۲- بررسی بازی در سیستم با در نظر گرفتن ساختارهای غیر کنترل‌پذیر.

Table 2- Examination of the game in the system considering uncontrollable structures

بررسی تعادل	پرداختی سیستم (دریافتی سرورهای همگراکننده)	فرآیند برای همکاری با سایر سرورها
*	$(d\pi - \tilde{C}_p - \tilde{C}_R, \tilde{S} + \tilde{W} - \tilde{Y}_E - \tilde{Y}_I)$	سرور با استفاده از ساختار دینامیکی سیستم و با ایجاد ارجحیت به تحلیل ورودی‌ها اقدام می‌کند.
-	$(-\tilde{C}_p - \tilde{C}_R, 0)$	یک سرور با استفاده از ساختار دینامیکی سیستم و با ایجاد ارجحیت به بهبود روند سیستم اقدام نمی‌کند.
*	$(d\pi - \tilde{C}_p, \tilde{S} - \tilde{Y}_E - \tilde{Y}_I)$	سرور با استفاده از ساختار دینامیکی سیستم و بدون در نظر گرفتن ارجحیت‌های سیستم به بهبود روندهای سیستم اقدام می‌کند.

جدول ۲- ادامه.
Table 2- Continued.

فرآیند برای همکاری با سایر سرورها	پرداختی سیستم (دریافتی سرورهای همگراکننده)	بررسی تعادل
سرور با استفاده از ساختار دینامیکی سیستم و بدون در نظر گرفتن ارجحیت های سیستم بهبود روندهای سیستم را در نظر نمی گیرد.	$(-\tilde{C}_p, 0)$	-
سرور بدون استفاده از ساختار دینامیکی سیستم و با در نظر گرفتن ارجحیت های سیستم به بهبود روندهای سیستم اقدام می کند.	$(\pi - \tilde{C}_R, \tilde{S} + \tilde{W} - \tilde{Y}_E - \tilde{Y}_I)$	*
سرور بدون استفاده از ساختار دینامیکی سیستم و با در نظر گرفتن ارجحیت های سیستم به بهبود روندهای سیستم اقدام نمی کند.	$(-\tilde{C}_R, 0)$	-
سرور بدون استفاده از ساختار دینامیکی سیستم و بدون ارجحیت های سیستم به بهبود روندهای سیستم اقدام می کند.	$(\pi, \tilde{S} - \tilde{Y}_E - \tilde{Y}_I)$	*
سرور بدون استفاده از ساختار دینامیکی سیستم و بدون ارجحیت های سیستم به بهبود روندهای سیستم اقدام نمی کند.	$(0, 0)$	-

۵- نتیجه گیری

این بررسی سیستم های دینامیکی فازی را بر اساس دیدگاه های ارائه شده در تامین خدمات در یک سیستم که مبتنی بر عملکرد چندین خدمت دهنده مستقل (و یا وابسته) است بررسی و در دو ساختار معجزا بازی های متفاوتی ارائه داده است. عدم توجه به ساختارهای کنترل پذیری که به تعدد تعادل ها منجر گردید، یک پارامتر در عدم همگرایی سیستم تلقی می شود، زیرا در این حالت سرورهایی که برای همگرایی انتخاب شده اند، تنها به دنبال افزایش عایدی خود از سیستم هستند و متناسب با عملکرد سیستم عمل می کنند، لذا ساختارهای فازی ایجاد شده منجر به افزایش صف های انتظار برای همگرایی در سیستم شده و زمان رسیدن به همگرایی را به شدت افزایش می دهد. به عنوان یک نتیجه مشترک در دو ساختار کنترل پذیری و غیرکنترل پذیری مشخص شد بهره مندی از ساختار دینامیکی سیستم نسبت به در نظر گرفتن ارجحیت های سیستم می تواند تابع پرداخت بهتری برای سرورهای همگراکننده ایجاد نماید؛ بنابراین، حتی در هنگام نبود ساختارهای کنترل پذیری در سیستم، توجه به ساختارهای دینامیکی سیستم نسبت به در نظر گرفتن ارجحیت های ساختاری سیستم از اهمیت بیشتری برخوردار است و می تواند در کاهش زمان انتظار همگرایی در سیستم حایز اهمیت باشد. در مقابل توجه به ساختارهای کنترل پذیری، از افزایش ضمنی هزینه های زمانی به دلیل زمان های مختلف بهینه سازی اجتناب می کند؛ یعنی تابع هزینه ایجاد شده با وضعیت سیستم تغییر می کند و ساختار کنترل پذیری، به تکرارهای متعدد برای به دست آوردن جواب بهینه نیاز ندارد.

منابع

- [1] Ayala, V., & Da Silva, A. (2022). Structural properties of the bounded control set of a linear system. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2002.00436>
- [2] Attar, M., & Dabirian, M. (2019). Reinforcement learning for learning of dynamical systems in uncertain environment: a tutorial. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1905.07727>
- [3] Joseph, G. (2022). Output controllability of a linear dynamical system with sparse controls. *IEEE transactions on control of network systems*, 10(1), 147–156. <https://doi.org/10.1109/TCNS.2022.3188484>
- [4] Cho, H. C., Fadali, M. S., & Lee, H. (2005). Dynamic queue scheduling using fuzzy systems for internet routers. *The 14th IEEE international conference on fuzzy systems, 2005. fuzz'05.* (pp. 471–476). IEEE. <https://doi.org/10.1109/FUZZY.2005.1452439>
- [5] Rajarajeswari, P., & Sangeetha, M. (2014). Fuzzy intuitionistic on queuing system. *International journal of fuzzy mathematics and systems*, 3(10), 105–119. https://www.ripublication.com/ijfms/ijfmsv4n1_12.pdf
- [6] Munoz, E., & Ruspini, E. H. (2013). Simulation of fuzzy queueing systems with a variable number of servers, arrival rate, and service rate. *IEEE transactions on fuzzy systems*, 22(4), 892–903. <https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2013.2278407>
- [7] Panta, A. P., Ghimire, R. P., Panthi, D., & Pant, S. R. (2021). Optimization of M/M/s/N queueing model with reneging in a fuzzy environment. *American journal of operations research*, 11(03), 121. <http://www.scirp.org/journal/Paperabs.aspx?PaperID=109025>
- [8] Mittal, H., & Sharma, N. (2022). Modeling of communication network with queueing theory under fuzzy environment. *Mathematical statistician and engineering applications*, 71(2), 122–137. <https://B2n.ir/ez4172>
- [9] Decardi-Nelson, B., & Liu, J. (2022). Computing control invariant sets of nonlinear systems: Decomposition and distributed computing. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2205.05622>

- [10] Aarathi, S., & Shanmugasundari, M. (2023). Comparison of infinite capacity FM/FEk/1 queuing performance using fuzzy queuing model and intuitionistic fuzzy queuing model with erlang service rates. *Pakistan journal of statistics and operation research*, 187–202. <https://doi.org/10.18187/pjsor.v19i1.4055>
- [11] Meziani, K., Rahmoune, F., & Radjef, M. S. (2022). The service pricing strategies and the strategic behavior of customers in an unobservable Markovian queue with unreliable server. *RAIRO-operations research*, 56(1), 213–237. <https://doi.org/10.1051/ro/2021181>
- [12] Economou, A., & Kulkarni, V. (2020). Editorial introduction to the special issue on ‘strategic queueing: Game-theoretic models in queueing theory’-part 1. *Queueing systems*, 96, 201–203. <https://doi.org/10.1007/s11134-020-09680-w>
- [13] Subramanian, A., & Sankaran, M. (2022). Variance-based sensitivity analysis of dynamic systems with both input and model uncertainty. *Mechanical systems and signal processing*, 166(2), 108423. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ymssp.2021.108423>
- [14] Fletcher, S. J. (2022). *Data assimilation for the geosciences*. Elsevier. <https://B2n.ir/rb5453>
- [15] Khalili, S., & Lotfi, M. M. (2015). The optimal warehouse capacity: A queuing-based fuzzy programming approach. *Journal of industrial and systems engineering*, 8(2), 1–12. <https://dor.isc.ac/dor/20.1001.1.17358272.2015.8.2.1.2>
- [16] Mezic, I., & Runolfsson, T. (2004). Uncertainty analysis of complex dynamical systems. *Proceedings of the 2004 american control conference* (pp. 2659–2664). IEEE. <https://doi.org/10.23919/ACC.2004.1383866>
- [17] Jing, S., Li, R., Niu, Z., & Yan, J. (2020). The application of dynamic game theory to participant’s interaction mechanisms in lean management. *Computers & industrial engineering*, 139, 106196. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2019.106196>
- [18] Yu, R., Chen, Y. H., & Han, B. (2022). Cooperative game approach to robust control design for fuzzy dynamical systems. *National Library of Medicine*. 52(7), 7151–7163. <https://doi.org/10.1109/tcyb.2020.3035414>
- [19] Zheng, Y., Zhao, H., & He, C. (2023). Nash game-based adaptive robust control design optimization for the underactuated mechanical system with fuzzy evidence theory. *Optimal control applications and methods*, 44(3), 1251–1277. <https://doi.org/10.1002/oca.2761>
- [20] Zhu, Z., Ma, J., Sun, H., Wang, W., Zhao, H., & Lee, T. H. (2023). Game-theoretic optimization toward diffeomorphism-based robust control of fuzzy dynamical systems with state and input constraints. *IEEE transactions on fuzzy systems*, 32(2), 373–387. <https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2023.3298341>